

Les dimensions du pôle magnétique : une controverse au cœur des premières
analyses dimensionnelles

Sybil G. de Clark
Université d'Arizona*

*Remarque : cette recherche a été menée à l'université Paris 7, Denis Diderot.

Veillez adresser toute correspondance écrite concernant cette soumission à : Sybil

de Clark
585 North N St
Livermore, CA 94551 2839 États-
Unis

E-mail : declark@physics.arizona.edu Tél.
: (520) 861 8552
Fax : N/A

Remerciements

L'auteur tient à remercier Olivier Darrigol, Nadine de Courtenay, Jan Lacki, John Roche, Scott Walter et Bruce Hunt pour leurs commentaires et suggestions utiles et encourageants.

Les dimensions du pôle magnétique : une controverse au cœur des premières analyses dimensionnelles

Sybil de Clark

Résumé L'essor de l'analyse dimensionnelle à la fin du XIX^e siècle s'est produit en grande partie dans le contexte de l'électromagnétisme. Il est rapidement apparu que ce sujet, bien qu'apparemment simple, était en réalité semé d'embûches. Celles-ci ont révélé des problèmes conceptuels profonds concernant la nature des grandeurs physiques. En général, la question de savoir si ces problèmes constituaient réellement des incohérences faisait elle-même l'objet d'un débat. Dans un cas cependant, concernant les dimensions électrostatiques du pôle magnétique, tous les protagonistes ont convenu que la question méritait d'être examinée. Une controverse a éclaté en 1882. Sa résolution reposait en partie sur la prise de conscience qu'elle résultait de différences entre les cultures scientifiques qui prévalaient sur le continent et en Grande-Bretagne. Ces différences culturelles concernaient la pertinence éventuelle du milieu dans lequel se produisent les interactions impliquant des pôles magnétiques, ainsi que la compréhension de la perméabilité dans le modèle de magnétisme d'Ampère. La controverse autour des dimensions électrostatiques du pôle magnétique soulevait des questions cruciales qui allaient bientôt jouer un rôle tout aussi central dans un débat plus large sur les dimensions des grandeurs électromagnétiques dans différents systèmes d'unités. Le fait que ce dernier sujet n'ait jamais été abordé lors de la controverse de 1882 donne un aperçu de la compréhension initiale de l'analyse dimensionnelle.

1 Introduction

1.1 Qu'est-ce que l'analyse dimensionnelle ?

L'analyse dimensionnelle est une méthode utilisée en physique et en ingénierie pour étudier les relations entre les grandeurs physiques. Elle attribue d'abord à ces dernières des « dimensions ». Celles-ci peuvent ensuite être comparées, notamment pour s'assurer que les équations physiques respectent la règle attendue de « l'homogénéité dimensionnelle ». Le concept clé, à savoir les « dimensions », est lié à celui des unités, et l'analyse dimensionnelle au sens moderne du terme est d'ailleurs née d'une préoccupation concernant les conversions entre différents systèmes d'unités.

La physique exige que des unités soient définies pour toutes les grandeurs physiques. Cependant, ces unités ne sont pas choisies indépendamment les unes des autres, d'où l'expression « *système* d'unités ». En effet, certaines grandeurs sont choisies dont les unités sont considérées comme « fondamentales » ou

« unités de base ». Toutes les autres grandeurs physiques voient alors leurs unités définies par référence à ces unités fondamentales, et c'est pourquoi on les appelle « unités dérivées ».

Par exemple, dans le système SI, l'une des unités de base est celle de la longueur : le mètre.
¹ L'unité de surface est alors définie par référence à celle-ci comme le mètre carré.

Les grandeurs de base et leurs unités sont définies arbitrairement, principalement pour des raisons de commodité et de précision. Dans notre exemple, le mètre est la distance parcourue par la lumière dans le vide en un intervalle de temps de 1/299 792 458 seconde.²

Les unités dérivées, quant à elles, sont définies à partir des unités de base en utilisant les lois physiques qui relient les grandeurs physiques correspondantes, ou plus précisément les valeurs qui mesurent ces grandeurs physiques. Fixer la définition d'une unité dérivée peut être plus qu'une simple question de formalisme : comme les préoccupations de précision impliquent des considérations expérimentales, il peut être nécessaire d'avoir à l'esprit un dispositif réel dans lequel la loi physique peut être incarnée.³ Cependant, la relation entre une unité dérivée et les unités de base peut être trouvée simplement par un examen formel de la loi physique choisie. Dans notre exemple, l'aire d'une surface est donnée par le carré de la longueur du côté d'une surface carrée de même taille, c'est-à-dire aire = longueur² ; et il en va de même pour les unités de ces quantités : mètre carré = (mètre)².

C'est là qu'intervient l'analyse dimensionnelle. Elle attribue des symboles aux unités fondamentales : notamment, L représente l'unité de base de la longueur, T celle du temps et M celle de la masse. En pratique, on n'écrit pas « mètre carré = (mètre)² », mais plutôt, en utilisant le langage de l'analyse dimensionnelle : [surface] = L⁽²⁾ où les crochets représentent les « dimensions de ». Pour prendre un exemple un peu moins trivial, les dimensions de la force, [F], seraient dérivées de la deuxième loi de Newton comme suit. La deuxième loi de Newton stipule :

$$F = m \times \frac{d^2 x}{dt^2}$$

où F représente la force exercée sur l'objet, m sa masse, x sa position et t le temps, tous compris comme des grandeurs physiques.⁴ Les grandeurs du côté droit – que j'ai choisi pour des raisons pratiques de base – ont les dimensions suivantes : $[m] = M$, $[x] = L$, $[t] = T$. Les dimensions d'une dérivée sont les mêmes que celles d'un rapport normal,⁵ par conséquent les dimensions de la force sont $[F] = ML^{-1}T^{-2}$.

¹ SI signifie « Système international d'unités ». Les autres unités sont celles du temps (la seconde), de la masse (le kilogramme), de la température (le kelvin), du courant électrique (l'ampère), de l'intensité lumineuse (la candela) et de la quantité de matière (la mole).

² Comme pour souligner le caractère arbitraire de sa définition, le mètre a connu plusieurs définitions : à l'origine, en 1793, il était défini comme le dix millionième de la distance entre l'équateur et le pôle Nord de la Terre ; puis, en 1889, il est devenu la longueur d'un prototype de barre, et en 1960 la¹¹ Conférence générale des poids et mesures (CGPM) l'a redéfini comme étant 1 650 763,73 fois la longueur d'onde de la raie d'émission du krypton 86. La définition actuelle est en vigueur depuis 1983, date à laquelle elle a été adoptée lors de la 17e CGPM.

³ Par exemple, Wilhelm Weber a défini l'unité de *force électromotrice* comme suit : « On peut entendre par unité absolue de mesure de la force électromotrice la force électromotrice que l'unité de mesure du magnétisme terrestre exerce sur un conducteur fermé, si ce dernier est tourné de telle sorte que la surface de sa projection sur un plan perpendiculaire à la direction du magnétisme terrestre augmente ou diminue pendant l'unité de temps de l'unité de surface. » (Weber 1861, p. 227).

⁴ C'est-à-dire une valeur numérique et l'unité, telle que « 4 kg ».

⁵ C'est-à-dire que la dérivée première d'une quantité donne les mêmes dimensions que sa division par elle-même, et la dérivée seconde, les mêmes dimensions que sa division par son carré.

Une fois que les dimensions de toutes les quantités connues ont été établies de cette manière, l'analyse dimensionnelle peut être utilisée pour vérifier les dérivations. En effet, tous les termes qui apparaissent dans une équation doivent être « (dimensionnellement) homogènes », c'est-à-dire avoir les mêmes dimensions les uns que les autres.⁶ Lorsqu'un résultat semble enfreindre cette règle, cela signifie qu'une erreur a dû être commise au cours de la dérivation. Cette méthode est systématiquement utilisée comme première vérification des résultats, et il semble juste de dire qu'elle constitue aujourd'hui l'utilisation la plus répandue de l'analyse dimensionnelle en physique.⁽⁷⁾

En prévision des questions qui seront soulevées ci-dessous, il est important de souligner comment la relation entre les dimensions et les systèmes d'unités est comprise aujourd'hui. Certains systèmes d'unités courants diffèrent par leurs unités de base, mais partagent les mêmes grandeurs de base. Par exemple, le système CGS diffère du système métrique en ce qu'il utilise le centimètre au lieu du mètre et le gramme au lieu du kilogramme comme unités de base de longueur et de masse, mais les deux systèmes utilisent L, T et M comme quantités de base. Il en va de même pour les systèmes d'unités entre lesquels il faut généralement convertir dans la vie quotidienne en raison de leur utilisation à des degrés divers dans différents pays : SI (mètre, km, kg...), unités impériales et unités usuelles américaines (pied, mile, livre...). Cependant, différents systèmes d'unités peuvent également avoir des quantités de base différentes. Par exemple, la physique des particules utilise les « unités naturelles », qui utilisent trois unités de base (l'unité de longueur, la vitesse de la lumière c et la constante de Planck h), trois définitions fondamentales qui nous permettent de les relier aux unités de longueur, de temps et de masse,⁽⁸⁾ et une seule dimension, L, car c et h sont toutes deux considérées comme sans dimension.⁽⁹⁾

Comme nous le verrons ci-dessous, à l'époque de la controverse qui fait l'objet du présent article, deux systèmes d'unités étaient utilisés dans le domaine de l'électromagnétisme. Ceux-ci avaient les mêmes grandeurs de base (L, M et T) et les mêmes unités de base. La différence entre eux résidait dans la manière dont ils obtenaient les unités des grandeurs dérivées : certaines des relations physiques utilisées à cette fin n'étaient pas les mêmes dans les deux systèmes, et les dimensions obtenues pour les grandeurs dérivées ne l'étaient pas non plus.

⁶ Notez que c'est évidemment le cas dans les exemples donnés ci-dessus : il n'y a que deux termes, un de chaque côté du signe égal, et ils ont tous deux les mêmes dimensions.

⁷ Ce n'est toutefois pas le seul cas. Notamment, en théorie quantique des champs, l'analyse dimensionnelle est utilisée pour déterminer quels termes peuvent légitimement apparaître dans une théorie. Voir la note de bas de page 8 ci-dessous pour plus de détails.

⁸ Ces relations sont les suivantes :

- $L = ct$, où L est la distance parcourue par un photon, t son temps de parcours et c la vitesse de la lumière dans le vide.

- $E = hf$, où E est l'énergie d'un photon de fréquence f , et h est la constante de Planck.

- $E = mc^2$, où E est l'énergie d'une particule de masse m (et c toujours la vitesse de la lumière).

⁹ Les deux ont également la valeur numérique 1. Puisque $L = ct$, $[L] = L$ implique $[t] = L$. Puisque $E = hf$ et que f est toujours donné par l'inverse d'un temps, cela implique à son tour $[E] = L^{-1}$. $E = mc^2$ implique alors $[M] = [E] = L^{-1}$. Comme la physique des particules traite davantage des énergies que des longueurs, il est devenu habituel d'utiliser M plutôt que L comme quantité de base : $[L] = [t] = M^{-1}$.

Une application importante de cela est la suivante. L'action, qui est l'intégrale temporelle d'une énergie, est

sans dimension : $M^{-1} M = M^0$. La densité lagrangienne L est liée à l'action S par : $S = \int d^4x L$, où

L'intégrale porte sur les coordonnées spatio-temporelles. Étant donné que le temps et l'espace ont tous deux une dimension M^{-1} , chaque terme de L

doit avoir la dimension M^4 . Prenons l'exemple d'une théorie scalaire, c'est-à-dire une théorie dans laquelle le champ ϕ est une

quantité scalaire, l'un de ces termes est $\frac{1}{2} (\partial \phi)^2$, ce qui implique que $[\phi] = M$. Sachant cela, on peut imposer des contraintes

$\frac{1}{2} (\partial \phi)^2$

sur la forme que peuvent prendre les autres termes de L , c'est-à-dire sur les fonctions du champ qu'ils peuvent être, puisqu'ils doivent tous avoir la dimension M^4 .

1.2 L'émergence de l'analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle au sens moderne du terme remonte à l'ouvrage *Théorie analytique de la chaleur* de Jean Baptiste Joseph Fourier, publié en 1822. La question de l'homogénéité, au sens des conditions requises pour qu'une relation entre des grandeurs physiques ait un sens, se posait déjà dans l'Antiquité. Par exemple, seules les quantités homogènes, c'est-à-dire, étymologiquement, « de même nature », pouvaient être additionnées, et Euclide a énoncé un principe similaire pour les rapports. Ces quantités étaient généralement considérées comme géométriques – lignes ou surfaces (Euclide, livre 5, lemme 3 ; voir Mueller, 1970, pp. 1-6). L'introduction des quantités dérivées par Isaac Newton au XVIII^e siècle a finalement conduit à une conception numérique des équations au XVIII^e siècle (voir Macagno 1971, p. 392). Tous les termes et toutes les quantités étant désormais des nombres purs, la question de l'homogénéité semblait sans objet ⁽¹⁰⁾. Au début du XIX^e siècle, cependant, Fourier a reformulé la question en une problématique différente. Si les termes représentaient des nombres, que restait-il d'une équation lorsque ces nombres étaient modifiés par un changement d'unités ? Dans quelles conditions une équation resterait-elle vraie indépendamment du système d'unités considéré ? Fourier a défini ces conditions à l'aide de la relation entre les facteurs de conversion des quantités dérivées et ceux d'un ensemble de quantités de base. Les termes étaient homogènes lorsque leurs unités avaient la même relation avec les unités de base (Fourier 1822, pp. 154-158).

Les travaux de Fourier n'ont pas eu d'impact immédiat, et dans les décennies qui ont suivi, avant que l'analyse dimensionnelle ne suscite l'intérêt, Wilhelm Eduard Weber a introduit trois systèmes d'unités dans le contexte de la théorie électromagnétique. Une même grandeur physique avait généralement *des dimensions* différentes dans ces différents systèmes *d'unités*.

Tout comme Carl Friedrich Gauss, Weber souhaitait définir de nouvelles unités stables pour les grandeurs électriques et magnétiques, et développa la notion de mesure absolue ¹¹. Les travaux de Gauss et Weber reposaient sur le credo mécaniste selon lequel les unités de toutes les grandeurs physiques, notamment électromagnétiques, pouvaient être exprimées en termes d'unités de grandeurs mécaniques. Ils considéraient quelques unités mécaniques comme fondamentales, à savoir la longueur, le temps et la masse, et à partir de celles-ci, ils ont dérivé des « unités absolues » pour les grandeurs électriques et magnétiques. ⁽¹²⁾ Plus précisément, Gauss s'intéressait à la définition d'une unité absolue pour l'intensité du champ magnétique, et Weber à celle de la résistance électrique (Gauss 1833, Weber 1851). Cela a conduit Weber à définir trois « systèmes d'unités absolues » différents : les systèmes « électrostatique », « électromagnétique » et « électrodynamique ». Les deux premiers ont été particulièrement bien acceptés. Ils ont notamment été décrits par James Clerk Maxwell dans son célèbre *Traité sur l'électricité et le magnétisme* (Maxwell 1873, vol. 2, chapitre 10).

¹⁰ Voir notamment Roche (1998, pp. 88-190) et Charbonneau (1996, pp. 15-38).

¹¹ Voir Roche (1998, pp. 197-202). Cette période a été marquée par un souci de normalisation : le système métrique a perduré après les guerres napoléoniennes et a incité plusieurs États allemands à réformer leurs poids et mesures. À cette fin, ils ont fait appel à des scientifiques, notamment Gauss lui-même qui, en 1836, a été chargé d'un tel programme à Hanovre. La définition de nouvelles normes de mesure exigeait des instruments de précision, mais aussi le respect de procédures bien définies, tant pour la reproduction des étalons matériels que pour la réalisation des mesures proprement dites. Voir notamment Olesko (1995) et (1996).

¹² Gauss : original Carl Friedrich Gauss, Goettingue, 1833, traduction française, « Mesure absolue de l'Intensité du Magnétisme terrestre », *Annales de chimie et de physique*, 5 (1834), 5-69.

Wilhelm Weber, « Elektrodynamische Maasbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen », *Königliche Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-physikalische Classe, Abhandlungen*, 199-382 ; traduit en anglais par E. Atkinson sous le titre « On the measurement of Electric Resistance according to an absolute standard », *Philosophical Magazine*, 4 (1861), 226-269.

La différence fondamentale entre ces deux systèmes résidait dans le fait qu'ils reposaient sur des lois de la force différentes, ou, de manière équivalente, sur des lois de champ différentes. Le système d'unités électrostatique était basé sur la loi de Coulomb relative à la force entre des charges électrostatiques :

$$f = \frac{e_1 e_2}{r^2} \quad (1)$$

où e représente la charge, f la force et r la distance entre les deux charges. En termes de dimensions, cela implique :

$$[f] = \frac{[e]^2}{L^2}, \quad (2)$$

et avec $[f] = LT^{-2}M$, cela donne :

$$[e_s] = L^{3/2} T^{-1} M^{1/2}, \quad (3)$$

où l'indice « s » fait référence aux dimensions dans le système électrostatique.¹³

Comme nous le verrons plus en détail dans la section 2.1 ci-dessous, Maxwell a en fait utilisé le champ plutôt que les forces. Son équation déterminante pour le système électrostatique était la suivante :

$$\mathbb{E} = \frac{e}{r^2} \quad (4)$$

où F était le champ électrique (Maxwell 1873, § 625). Cela semblerait d'abord nécessiter de trouver les dimensions du champ en termes de L , M , T . Au lieu de cela, il a remplacé $[F]$

et $[e]$ par des relations en termes de T , L , M , e ou T , L , M , m , qui étaient indépendantes du système concerné, notamment dans la mesure où leur dérivation ne nécessitait pas de faire appel aux lois de Coulomb sur la force.¹⁴

En revanche, le système électromagnétique était défini sur la base de la loi de Coulomb entre les pôles magnétiques :

$$f = \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (5)$$

où m représente la force du pôle, f la force et r la distance entre les deux pôles. Cette relation était alors couramment utilisée, au même titre que son équivalent électrostatique. Le concept de pôle utilisé à l'époque correspondait à un pôle d'un aimant idéalisé, c'est-à-dire uniformément magnétisé sur toute sa longueur, et dans la limite où

¹³ Voir notamment Everett (1879), chapitres X et XI. Une description analogue en termes d'unités plutôt que de dimensions était la suivante : « Dans le système *électrostatique*, l'unité la plus importante, qui sert de base à toutes les autres, est l'*unité d'électricité*. Elle est déterminée par la définition suivante : – L'*unité d'électricité* est la quantité d'électricité qui exerce l'unité de force sur une quantité égale d'électricité à l'unité de distance. » (Clausius 1882, p. 383).

¹⁴ Il attribuait naturellement à r^2 les dimensions L^2 .

cet aimant devient infiniment long et mince (ses extrémités deviennent donc ponctuelles).¹⁵
L'équation 5 conduit à la relation dimensionnelle suivante :

$$[f] = \frac{[m]^2}{L^2}, \quad (6)$$

et avec $[f] = LT^{-2}M$ ce qui donne :

$$[m_m] = L^{3/2}T^{-1}M^{1/2}, \quad (7)$$

où l'indice « m » désigne le système électromagnétique. La comparaison avec l'équation 3 montre que la loi de Coulomb pour le magnétisme donne les mêmes dimensions pour m dans le système électromagnétique que son équivalent électrostatique pour e dans le système électrostatique, comme on pouvait s'y attendre compte tenu de la similitude structurelle entre les deux lois.¹⁶

Encore une fois, au lieu de la loi de la force effectivement utilisée par Maxwell :

$$H = \frac{m}{L^2} \quad (8)$$

comme base du système électromagnétique, où H était le champ magnétique (Maxwell 1873, § 625 ; voir section 2.1 ci-dessous).¹⁷

Jusqu'en 1883, personne ne semble avoir exprimé son mécontentement quant au fait qu'une quantité ait généralement *des dimensions* différentes selon les systèmes *d'unités*. Cependant, on s'attendait à ce qu'une quantité physique donnée ait un ensemble unique de dimensions dans un système donné. En 1882, cette exigence a donné lieu à une controverse concernant les dimensions d'un pôle magnétique. Le débat s'est principalement déroulé en Grande-Bretagne, dans le *Philosophical Magazine*, à la suite d'une publication allemande de Rudolf Clausius en mars 1882, rapidement traduite dans le magazine britannique (Clausius 1882).

2 Les dimensions électrostatiques du pôle magnétique selon Maxwell et Clausius

¹⁵ Maxwell 1873, vol. 2, chapitre 1, § 373. Le magnétisme était attribué à des courants électriques microscopiques. En 1882 (à l'époque où la controverse faisait rage), Lodge croyait « universellement accepté » que « les propriétés des substances magnétiques de toutes sortes [étaient] expliquées par des courants électriques moléculaires, et qu'il n'existait pas d'aimants ou de substances magnétiques autres que ceux constitués de molécules conductrices de courant ». (Lodge 1882, p. 363)

¹⁶ Encore une fois, cela peut être exprimé en unités de la manière suivante :

« L'unité de magnétisme est la quantité de magnétisme qui exerce sur une quantité égale de magnétisme à l'unité de distance l'unité de force. » (Clausius 1882, p. 384)

Clausius préférait en fait appeler ce système « système électrodynamique », car il partageait l'avis d'Ampère selon lequel le magnétisme provenait de *courants* électriques microscopiques, et était donc de nature électrodynamique. Il utilisait donc l'indice « d » à la place de « m », mais précisait clairement qu'il était communément appelé « système électromagnétique ». (Clausius 1882, p. 383)

¹⁷ Ce que nous appellerions aujourd'hui le champ magnétique auxiliaire.

Quant au système électrodynamique, il était basé sur la loi d'Ampère entre les éléments de courant. (Weber 1851).

2.1 Les dimensions des grandeurs électromagnétiques dans le *Traité sur l'électricité et le magnétisme* de Maxwell

Afin de bien comprendre les enjeux, il est nécessaire de rappeler le point de vue britannique de l'époque, tel qu'il avait été exprimé par James Clerk Maxwell. En effet, on peut affirmer sans se tromper que le *Traité sur l'électricité et le magnétisme* de Maxwell (Maxwell 1873) a suscité l'intérêt pour l'analyse dimensionnelle tant en Grande-Bretagne qu'ailleurs : cet *ouvrage* a eu une grande influence, et Maxwell y a consacré un chapitre entier (Maxwell 1873, vol. 2, chapitre 10). L'importance qu'il accordait à l'analyse dimensionnelle peut être attribuée en partie à son intérêt général pour la classification des grandeurs physico-mathématiques (Darrigol 2000 ; Harman 1987), mais elle était également liée, une fois de plus, à la préoccupation dominante pour les normes de mesure. En effet, dix ans plus tôt, Maxwell avait co-rédigé une contribution sur le sujet à l'intention du *Comité sur les normes électriques*, qui avait été nommé par la *British Association for the Advancement of Science* dans le but d'établir une norme de résistance électrique ⁽¹⁸⁾. Le souhait d'améliorer les normes de mesure électromagnétique était lui-même fortement motivé par les besoins de la télégraphie par câble ⁽¹⁹⁾.

Dans son traité, Maxwell s'est concentré sur les relations indépendantes de tout système d'unités. Il a donné quinze relations dimensionnelles jugées fondamentales, soit des produits de quantités ayant les dimensions de l'énergie (équation 9 ci-dessous), de la densité d'énergie (équation 10),²⁰ soit des rapports conduisant à des dimensions particulièrement simples en termes d'unités de base de temps et de longueur (T, L, L², équations 11-13).²¹

$$[eE] = [m\Omega] = [pC] = \frac{L^2 M}{T^2} \quad (9)$$

$$[DF] = [BH] = [CU] = \frac{M}{LT^2} \quad (10)$$

$$\frac{[\oint]}{[C]} = \frac{[\oint]}{[E]} = \frac{[\oint]}{[F]} = (T) \quad (11)$$

$$\frac{[\oint]}{[F]} = \frac{[\oint]}{[H]} = \frac{[\oint]}{[U]} = (L) \quad (12)$$

$$\frac{[e]}{[D]} = \frac{[C]}{[C]} = \frac{[m]}{[B]} = (L)^{-2} \quad (13)$$

avec :

e : la quantité d'électricité

E : l'intégrale de ligne de l'intensité électromotrice

¹⁸ *Rapport de la 33e réunion de la British Association.*

¹⁹ Voir notamment Hunt (1994), (1996), (1997), (2003) et (2005), Schaffer (1997), ainsi qu'Atten (1992) pour le cas de la France.

²⁰ L'énergie et le travail ont les mêmes dimensions, comme l'exige le théorème de l'énergie cinétique. × Comme le travail est donné par la force multipliée par le déplacement, il a pour dimensions : [travail] = [force] × L = L T⁽⁻²⁾ M × L = L⁽²⁾ T⁽⁻²⁾ M. La densité d'énergie a donc pour dimensions : [densité d'énergie] = [énergie] ÷ [volume] = L⁽²⁾ T⁽⁻²⁾ M ÷ L⁽³⁾ = L⁽⁻¹⁾ T⁽⁻²⁾ M.

²¹ Conformément à l'usage standard, j'utiliserai l'italique pour les quantités (par exemple « e » pour la quantité d'électricité) des crochets pour désigner les dimensions d'une quantité dérivée (telle que $[e]$), et ni crochets ni italique pour les quantités fondamentales en termes desquelles les dimensions sont exprimées (par exemple « L » pour la longueur). (Maxwell 1873, vol. 2, chapitre 10, § 621-622.)

m : quantité de magnétisme
 Ω : le potentiel magnétique
 p : la quantité de mouvement électrocinétique d'un circuit
 C : le courant électrique
 D : le déplacement électrique
 F : l'intensité électromotrice
 B : l'induction magnétique
 H : le champ magnétique auxiliaire
 C : l'intensité du courant en un point
 U : le potentiel vectoriel

Maxwell n'a pas précisé comment il est parvenu aux équations 9 et 10. Il semble avoir simplement considéré comme physiquement évident que les produits impliqués avaient respectivement pour dimensions l'énergie et la densité d'énergie. Il a justifié l'équation 11 par le fait qu'elle impliquait les rapports entre l'intégrale temporelle des quantités et les quantités elles-mêmes. Par exemple, la quantité d'électricité e est l'intégrale temporelle du courant électrique C . En termes de dimensions, l'intégration d'une quantité implique de la multiplier par ses dimensions, donc :

$$\left[\int C dt \right] = \left[C \right] \left[t \right] \quad (14)$$

De même, (Eq.12) et (Eq.13) étaient respectivement les rapports entre les intégrales de ligne et de surface et les quantités elles-mêmes, donnant ainsi les dimensions de L et L^2 .

Maxwell a ensuite utilisé ces quinze relations afin d'obtenir les dimensions des principales grandeurs électriques et magnétiques. Il y avait cependant un problème : bien que ces relations ne concernaient que douze grandeurs, elles n'étaient pas toutes indépendantes, de sorte qu'il en aurait fallu une autre pour déterminer de manière unique les dimensions des douze grandeurs en termes de L , M et T seuls.

Pour remédier à cette difficulté, Maxwell a temporairement ajouté une quatrième unité de base, ou plutôt deux. Il a donné une liste de dimensions en termes de L , M , T et de l'unité de charge statique e , et une autre liste en termes de L , M , T et de l'unité de pôle magnétique m . Ces deux ensembles de dimensions étaient valables quel que soit le système d'unités considéré, notamment le système électrostatique ou électromagnétique.

Les éléments les plus importants dans le calcul de Maxwell étaient $[e]$, $[m]$ et le champ électrique $[F]$, pour lesquels il a trouvé, en fonction de e et m respectivement :

$$[m] = \frac{L^2 M}{e T} = m \quad (15)$$

$$[e] = \frac{L^2 M}{m T} \quad (16)$$

$$[F] = \frac{L M}{T^2} = \frac{m e}{L T} \quad (17)$$

Il est important de noter que Maxwell n'a pas expliqué comment il a obtenu ces dimensions à partir des relations à quinze dimensions précédemment établies, et c'est cette étape qui allait donner lieu à des désaccords quant à l'interprétation de son travail.

De plus, malgré ce que Maxwell semblait suggérer, les dimensions en termes de L, T, M, e et L, T, M, m des différentes quantités électromagnétiques qu'il a fournies ne peuvent pas toutes être dérivées des quinze relations dimensionnelles qu'il donne dans le texte. Certaines le peuvent, et même avec beaucoup moins que ses quinze relations. Notamment, la première égalité

dans l'équation 17 peut être facilement obtenu à partir de $[E] = L^2 M^{-1} T^{-2}$ et $[F] = L T^{-1}$ (voir équations 9 et 12

respectivement), ou bien à partir de $[DF] = \frac{M}{L T^2}$ et $[E] = L T^{-1}$ (voir équations 10 et 13). Cependant

dans de nombreux cas, une relation supplémentaire est nécessaire. Cela est vrai même pour $[m] = \frac{L^2 M}{e T}$ (Eq.15) et $[e] = \frac{L^2 M}{m T}$ (Eq.16). L'un peut être obtenu directement à partir de l'autre, simplement

en résolvant respectivement e ou m. Cependant, aucune des deux ne peut être dérivée à partir des quinze relations données par Maxwell ⁽²²⁾.

Pour cette raison, Clausius a plus tard soutenu que Maxwell avait utilisé $[p] = [m]$. Cela est concevable, car cela conduit à toutes les dimensions données par Maxwell, et il l'a d'ailleurs écrit explicitement lorsqu'il les a énumérées. Cependant, la manière dont il l'a fait suggère plutôt qu'il avait dérivé les dimensions de p et m indépendamment, et qu'il s'était trouvé qu'elles étaient identiques.⁽²³⁾ En revanche, Maxwell a bien fourni une relation supplémentaire dans la section même où il énumérait les quinze principales, bien qu'il ne l'ait fait que dans une note de bas de page et qu'il n'ait donné aucun indice quant à

son origine $[U] = L$.²⁴ En combinaison avec les autres, cette relation (tout comme $[p] = [m]$)²⁵

en effet, donne toutes les dimensions données par Maxwell, y compris $[m] = \frac{L^2 M}{e T}$ et $[e] = \frac{L^2 M}{m T}$.

En utilisant la relation $[U] = L$ au lieu de $[p] = [m]$ cependant, même les méthodes les plus simples pour obtenir

nécessitent beaucoup plus d'équations :

⁽²²⁾ La deuxième égalité de l'équation 17, $[F] = \frac{m}{L T}$. Voir la note de bas de page 26 ci-dessous.

²³ En effet, Maxwell a écrit :

$$(3) \text{ et } (5) [p] = [m] = \frac{[L]^{(2)} [M]}{[e] T} = [m],$$

où « (3) » et « (5) » renvoient respectivement à la numérotation de m et p, lorsqu'il a énuméré précédemment les grandeurs électromagnétiques elles-mêmes. En outre, il n'a jamais énuméré séparément (c'est-à-dire sur des lignes différentes) des grandeurs ayant les mêmes dimensions. Cette situation ne se produit que pour m et p, et C et Ω , et dans les deux cas, il a présenté les résultats de la même manière, c'est-à-dire à nouveau avec :

$$(4) \text{ et } (6) [C] = [\Omega] = \frac{[L]^{(2)} [M]}{[T]^{(2)}} = [C].$$

Si $[C] = [\Omega]$ devait également être interprété comme une relation supplémentaire aux quinze qu'il a explicitement données, nous aurions alors une abondance de richesses, car soit $[p] = [m]$, soit $[C] = [\Omega]$ est nécessaire pour trouver toutes les dimensions, mais pas les deux (elles donnent les mêmes résultats).

²⁴ Ni Maxwell ni Clausius ne commentent non plus pourquoi $[p]$ devrait être égal à $[m]$.

²⁵ Tout comme $[C] = [\Omega]$.

$$\begin{aligned} [m] &= L^{(2)}, \quad [j] = \frac{M}{LT^2}, \quad [C] = L^{(2)}, \quad [e] = L \text{ avec } [U] = L^{(26)} \\ [B] &= L^{(2)}, \quad [C] = L^{(2)}, \quad [B] = L^{(2)} \end{aligned} \quad (18)$$

En revanche, en utilisant $[p] = [m]$, on obtient :

$$[eE] = \frac{L^2 M}{T^2}, \quad [E] = \frac{M}{LT} \text{ avec } [p] = [m].^{27} \quad (19)$$

Cela explique probablement pourquoi Clausius privilégiait $[p] = [m]$ comme relation la plus susceptible d'avoir été utilisée par Maxwell.

Après avoir répertorié les dimensions en termes de L, T, M, e et L, T, M, m de toutes les quantités d'intérêt, Maxwell a ensuite dérivé leurs dimensions dans les systèmes d'unités électrostatiques et électromagnétiques (donc uniquement en termes de L, M et T) à l'aide de l'une de ces deux listes. Il a obtenu le système d'unités électrostatique en substituant dans l'une ou l'autre liste les dimensions électrostatiques de la charge électrique e et du pôle magnétique m – et a utilisé de la même manière leurs dimensions électromagnétiques pour obtenir le système électromagnétique. Les dimensions électrostatiques du pôle magnétique ont ainsi influencé les dimensions électrostatiques de toutes les quantités magnétiques, car ces dernières impliquaient m.

À son tour, Maxwell a défini les dimensions électrostatiques de e et m en comparant les dimensions du champ électrique obtenues ci-dessus à celles obtenues à partir de la loi de Coulomb entre les charges électrostatiques :

$$F = \frac{\text{charge électrostatique}}{(\text{distance de la charge})^2} \Rightarrow [F] = \frac{e^2}{L^2} \quad (20)$$

²⁶ Il existe encore de nombreuses autres combinaisons possibles, dont quatre autres qui impliquent le même nombre d'équations, avec $[U] = L$. La raison pour laquelle on $[U] = L$ utilise Contrairement à $[p] = [m]$ nécessite l'utilisation de $[U] = L$.

plus d'équations pour la dérivation de la relation entre e et m peut être liée au fait que trois des quinze relations dimensionnelles de Maxwell impliquent p, alors que seules deux contiennent U (m et B apparaissent toutes deux deux fois).

La deuxième égalité dans l'équation 17, $\frac{m}{LT}$, peut être dérivé tout aussi simplement avec $[U] = L$ comme avec $[p] = [m]$: $[F] =$

$$\begin{aligned} [F] &= \frac{[p]}{[U]} = \frac{[m]}{L} = \frac{M}{LT} \quad (1) \quad [F] = \frac{[p]}{[U]} = \frac{[m]}{L} = \frac{M}{LT} \quad (2) \\ [F] &= \frac{[p]}{[U]} = \frac{[m]}{L} = \frac{M}{LT} \quad (3) \end{aligned}$$

²⁷ Il existe de nombreuses autres possibilités, la plupart plus complexes. Pour n'en citer qu'une à titre d'exemple :

$$\frac{[DF]}{[L]^2} = \frac{[M]}{[L]^2} = \frac{[T]}{[L]^2} = \frac{[U]}{[L]^2} \text{ avec } [p] = [m].$$

²⁸ De manière analogue, le système électromagnétique était basé sur la loi de Coulomb pour le magnétisme : $H =$

$$\frac{m}{L^2}, \text{ où}$$

H était la « force magnétique » exercée sur un pôle magnétique d'intensité unitaire.

Avant obtenu ci-dessus $[F] = \frac{m}{LT}$ $\Rightarrow [e] = \frac{L^2 M}{mT}^{29}$ ce qui donne pour l'électrostatique
 $[m] = L^{1/2} M^{1/2}$.³⁰

2.2 Les dimensions électrostatiques du pôle magnétique selon Clausius

Clausius souhaitait également trouver les dimensions de toutes les grandeurs électriques et magnétiques importantes dans les systèmes d'unités électrostatiques et électromagnétiques. Cependant, son raisonnement différait de celui de Maxwell et était un peu plus simple.

Clausius a d'abord déterminé les dimensions de la charge électrique dans le système électrostatique et du pôle magnétique dans le système électromagnétique, en utilisant la loi de Coulomb correspondante dans chaque cas et en attribuant à la force ses dimensions mécaniques habituelles,

MLT⁻². Comme indiqué ci-dessus, ceci a conduit à aux dimensions $[e_s] = L^{3/2} T^{-1} M^{1/2}$ et

$[m_m] = L^{3/2} T^{-1} M^{1/2}$, où les indices « s » et « m » se réfèrent respectivement aux systèmes électrostatique et électromagnétique – résultats qui concordaient avec ceux de Maxwell (Clausius 1882, pp. 382-383).

Afin de trouver les dimensions de ces quantités dans l'autre système, c'est-à-dire $[e_m]$ et $[m_s]$, Clausius a estimé qu'il suffisait d'établir une relation entre e et m qui soit valable dans les deux systèmes d'unités. Il s'est appuyé sur l'hypothèse d'Ampère selon laquelle une boucle de courant électrique est équivalente à un aimant, équivalence que Maxwell approuvait, mais qu'il n'avait pas utilisée dans ses dérivations dimensionnelles. Clausius a posé un circuit plan entourant une surface d'unité de surface, et une deuxième surface de même forme, parallèle au circuit, séparée par une distance infinitésimale ϵ . Les deux surfaces étaient considérées comme contenant la même quantité de magnétisme, nord sur la première et sud sur la seconde, formant ainsi l'aimant considéré comme équivalent à la boucle de courant (Clausius 1882, pp.382-383).

²⁹ Voir respectivement les équations 17 et 16. implique $\frac{M}{m} = \frac{m}{T}$, de sorte que $[m] = L^{12} M^{12}$.

$$F = \frac{m}{L^2} \times \frac{m}{L^2} = \frac{m^2}{L^2 T^2} \quad F = \frac{m}{L T} \quad \frac{m}{m T} = \frac{m}{L T}$$

De même, après avoir obtenu ci-dessus dans l'équation 17 $\left[\frac{F}{L^2} \right] = \frac{LM}{e T^2}$, et en utilisant $F = \frac{e^2}{L^2}$ a donné pour l'électrostatique

dimensions de la charge électrique : $[e] = L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$.

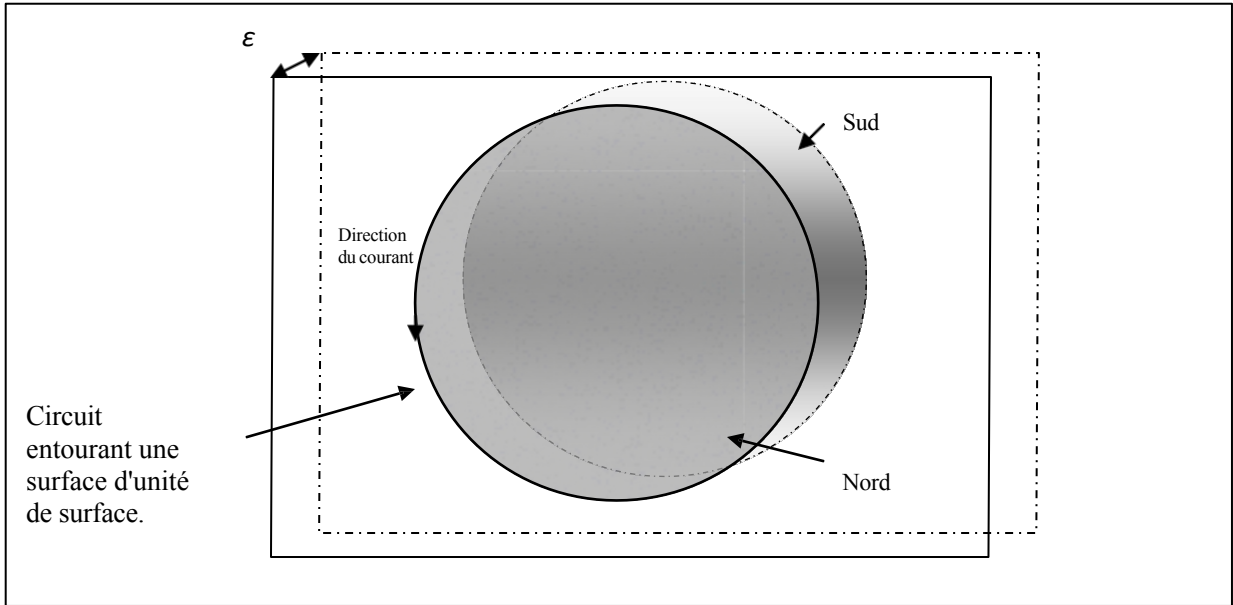


Figure 1 - Équivalence entre une boucle de courant et un aimant

Pour que les feuilles magnétiques produisent des forces de même intensité que le courant, les grandeurs physiques impliquées devaient satisfaire la relation suivante :

$$\begin{aligned} &\text{intensité du magnétisme sur une feuille} \times \text{distance entre les deux feuilles} \\ &= \\ &\text{intensité du courant} \times \text{surface entourée par la boucle de courant.}^{31} \end{aligned}$$

En termes de dimensions, cela signifiait :

$$[m] \times L = [e] T^{-1} \times L^2, \quad (21)$$

ou $\frac{[m]}{[e]} = L T^{-1}$, dans tous les systèmes d'unités. Avec $[e] = L^{3/2} T^{-1} M^{1/2}$ ce résultat impliquait

$[m_s] = L^{5/2} T^{-2} M^{1/2}$, en contradiction avec le résultat de Maxwell $[m_s] = L^{1/2} M^{1/2}$.

Clausius a expliqué son désaccord avec les résultats de Maxwell de la manière suivante.

Il pensait que Maxwell avait obtenu la relation $\frac{L^2 M}{m T}$ (équation 16 ci-dessus) à partir de :

$$[pC] = \frac{L^2 M}{T^2} \quad \text{et} \quad \left[\frac{e}{\oint C} \right] = \quad (22)$$

puis en identifiant $[p]$ et $[m]$.³² En remplaçant p par m et en multipliant les deux équations, on obtient $[em] = M L^{2T-1}$ au lieu de $\frac{[m]}{[e]} = L T^{-1}$. Clausius a jugé ce raisonnement incorrect car, selon lui, cela implique de prendre en compte la force entre un aimant

³¹ De nos jours, cela s'exprimerait par l'exigence que l'aimant et le circuit aient les mêmes moments magnétiques.

³² Comme cela a été discuté ci-dessus dans la section 2.1 (Maxwell 1873, vol. 2, chapitre 10, § 623).

pôle et un courant. Cette force est de nature *électrodynamique*, elle ne peut donc pas être utilisée à juste titre pour dériver des dimensions *électrostatiques*, a conclu Clausius.

3 La controverse : stratégies et motivations

La controverse a débuté en mai 1882 avec un article publié dans le *Philosophical Magazine* par Joseph David Everett, alors professeur de philosophie naturelle au Queen's College de Belfast (Everett 1882a, pp. 376-377).³³ Everett a brièvement résumé le raisonnement de Clausius, affirmant qu'il reposait sur l'équation suivante, vraie dans tous les systèmes d'unités :

$$\text{Pôle} \times \text{Longueur} = \text{Courant} \times (\text{Longueur})^2, \quad (23)$$

d'où :

$$= \text{de pôle} \text{ Courant} \times \text{Longueur}, \quad (24)$$

où les quantités représentaient leurs dimensions. Il a ensuite noté que les dimensions électrostatiques du courant étaient $M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}$, ce qui découle évidemment de la loi de Coulomb

loi électrostatique de Coulomb, et a noté que ces deux relations impliquaient que les dimensions électrostatiques

du pôle magnétique étaient $M^{1/2} L^{5/2} T^{-2}$.³⁴

Everett jugea l'analyse de Clausius « irréfutable » et continua en donnant un autre argument en sa faveur. Les dimensions électromagnétiques d'un pôle (en utilisant la relation pour la force entre deux pôles magnétiques) sont $M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$ et celles d'un courant $M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}$.³⁵

³³ Joseph David Everett (1831-1904) avait été secrétaire du Comité pour la sélection et la nomenclature des unités dynamiques et électriques, nommé par la *British Association* (British Association for the Advancement of Science 1875), et avait publié deux traités entièrement consacrés aux unités et aux dimensions (Everett 1875, Everett 1879). Il fut professeur de philosophie naturelle au Queen's College de Belfast pendant la majeure partie de sa carrière, de 1867 à 1897.

³⁴ D'après la loi de Coulomb entre charges électrostatiques, $f = \frac{e_1 e_2}{r^2}$, nous obtenons en termes de dimensions :

$$[e^2] = [f][r^2] = M L T^{-2} \times L^2 = M L^3 T^{-2},$$

c'est-à-dire $[e] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$.

Le courant a pour dimensions la charge divisée par le temps, donc dans le système d'unités électrostatique : $[\text{courant}] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}$.

En utilisant la relation Pôle = Courant $\times$ Longueur implique alors $[\text{pôle}] = M^{1/2} L^{5/2} T^{-2}$.

³⁵ Telles étaient les dimensions électromagnétiques du courant données par Maxwell (Maxwell 1873, vol. 2, chapitre 10, § 626). Pour les obtenir, il a sans doute divisé par T les dimensions électromagnétiques de la charge électrostatique, $[\Box_{(m)}] = \Box^{(1)/(2)} L^{(1)/(2)}$. Ces dernières ont été dérivées en prenant la forme dimensionnelle de l'

expression de la forme magnétique de la loi de Coulomb, c'est-à-dire $\frac{m}{L^2}$, et en y substituant la dimension $H =$

expressions pour $[m]$ et $[H]$ en termes de variables dans tous les systèmes d'unités :

$$[m] = \frac{L^2 M}{e T} \quad (\text{Eq. 15 ci-dessus}) \quad ; \quad [H] = \frac{e}{L T}$$

La manière dont Maxwell a obtenu cette dernière relation à partir de ses relations à quinze dimensions (équations 9 à 13) n'est pas claire non plus.

$$[H] = \left[\frac{(m)}{L^2} \right] \text{ ce qui a ensuite conduit à } \frac{e}{L T} = \frac{L^2 M}{e T} \times \left(\frac{1}{L^2} \right), \text{ et en résolvant cette équation pour } e, [e_m] = (M)^{1/2} L^{1/2}.$$

on obtient effectivement

Ce qui donne à nouveau $[Pôle] = [Courant] \times [Longueur]$. Trouver dans le système électromagnétique la même relation que celle obtenue par Clausius dans le système électrostatique semblait à Everett un argument en faveur de Clausius – ce qui peut paraître étrange étant donné que ce résultat est la conséquence directe de l'équivalence entre un circuit et un aimant, et donc indépendant du système considéré (comme le dit Everett lui-même). Plus important encore peut-être, Everett déclara ne pas être sûr de la manière dont Maxwell avait réellement obtenu ce résultat dans son traité, et invita ses lecteurs à clarifier ce point.

La demande d'Everett ne resta pas sans réponse. Le mois suivant, les réactions de trois scientifiques furent publiées dans le *Philosophical Magazine*, ainsi qu'une traduction de l'article de Clausius : Joseph John Thomson et le théoricien irlandais Joseph Larmor ont chacun rédigé un article (Thomson 1882a, Larmor 1882), et George Francis FitzGerald (alors professeur de philosophie naturelle au Trinity College de Dublin) a contacté Everett, qui a discuté de la contribution de FitzGerald dans son propre article (Everett 1882b).

En réponse à la demande d'Everett, Larmor et FitzGerald ont fourni des dérivations du résultat de Maxwell, selon lesquelles les dimensions électrostatiques du pôle magnétique étaient $M^{1/2} L^{1/2}$. Après avoir discuté de leurs suggestions, Everett les a comparées aux travaux de Clausius, dans le but de résoudre la contradiction.

Dans son article, Larmor avait plaidé en faveur de l'utilisation de la relation dimensionnelle pour la force entre un aimant et un courant (Larmor 1882, p. 430) : ³⁶

$$\times \text{ de courant } \times \times \text{ de pôle } L^{-2} = \text{ force,} \quad (25)$$

où « courant », « pôle » et « force » représentaient en fait les dimensions de ces grandeurs physiques. Il s'agissait de la version dimensionnelle de la relation suivante :

$$\text{force} = \frac{\text{longueur du } \times \times \times \text{ courant} \times \text{ pôle}}{(\text{distance entre le fil et le pôle})^2}. \quad (26)$$

En résolvant pour le poteau et en utilisant comme dimensions électrostatiques du courant celles qui sont unanimement

accepté $M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}$, ³⁷ Larmor a obtenu le résultat de Maxwell :

$$[pôle] = \frac{MLT^{-2} \times L^2}{M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}} \frac{L \times}{l^{1/2}} = (M) \frac{L^3}{L^{3/2}} = (M) L^{1/2}. \quad (27)$$

Lorsqu'il a discuté des travaux de Larmor, Everett a donné une relation plus explicite, à une différence importante près : pour des raisons qui deviendront bientôt claires, il a introduit une constante k_1 (Everett 1882b, pp. 431-432) :

³⁶ Cette force avait été découverte par Oersted et étudiée par Ampère.

³⁷ D'après la loi électrostatique de Coulomb, les dimensions de la charge dans le système électrostatique d'unités sont $[e] = L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$ (voir note de bas de page 30 ci-dessus), et ceux du courant sont simplement ces valeurs divisées par T.

$$\text{force} = k \frac{\text{longueur du fil} \times \text{courant} \times \text{pôle}}{(\text{distance entre le fil et le pôle})^2} \quad (28)$$

La critique de Clausius selon laquelle Maxwell a utilisé une relation électrodynamique pour construire le système électrostatique est clairement pertinente ici. La réaction d'Everett à ce sujet est intéressante : cela peut être vrai, a-t-il fait valoir, mais c'était également le cas de toutes les autres définitions de l'unité de pôle magnétique dans le système électrostatique, y compris celle utilisée par Clausius (Everett 1882b, p. 432). Ce n'est que partiellement vrai : bien que Clausius ait pris en compte un courant dans sa démonstration, l'équation qui en résultait incarnait *l'équivalence* entre un circuit et un aimant ; celle de Larmor, en revanche, exprimait la *force* entre les deux.

La deuxième dérivation discutée par Everett, qui lui avait été envoyée par Fitzgerald, un autre disciple irlandais de Maxwell, donnait également $M^{1/2} L^{1/2}$ pour les dimensions électrostatiques du pôle magnétique (Everett 1882b, p. 432). Cependant, elle était basée sur une relation encore différente : la « loi magnéto-électrique » selon laquelle *la force électromotrice* due au mouvement d'un conducteur dans un champ magnétique est proportionnelle à la longueur du conducteur, à sa vitesse et à l'intensité du champ :

$$\text{f.m.e.} \propto L \times \boxtimes B. \quad (29)$$

Si l'on se réfère ensuite à la loi de Coulomb sur la force magnétique,³⁸ on obtient :

$$[\text{e.m.f.}] = L \times L T^{-1} \times [\text{pôle}] \times L^{-2}, \quad (30)$$

(ou, selon Everett, $[\text{e.m.f.}] = [k] \times L \times L T^{-1} \times [\text{pôle}] \times L^{-2}$, avec $\boxtimes = 1$), d'où :

$$[\text{pôle}] = \frac{[\text{e.m.f.}]}{L \times L T^{-1} \times L^{-2}} = \frac{[\text{e.m.f.}]}{L \times T^{-1}} = [\text{e.m.f.}] \times T \quad (31)$$

L'e.m.f. étant l'intégrale de ligne du champ électrique, ses dimensions dans le système électrostatique sont $M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}$,³⁹ d'où, à nouveau, le résultat de Maxwell :

$$[\text{pôle}] = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1} \times \boxtimes = M^{1/2} L^{1/2} \quad (32)$$

Avec les travaux de Clausius, ces réactions ont inspiré à Everett le commentaire suivant :

³⁸ Plus précisément, la relation que cette loi de force implique pour l'intensité magnétique, à savoir : $[B] = [\text{pôle}] \times \boxtimes^2$.

³⁹ Rappelons de l'équation 17 que Maxwell avait obtenu d'une manière ou d'une autre pour le champ électrique F la relation dimensionnelle

$[F] = \frac{L M}{e T^2}$, valable dans tous les systèmes d'unités. Dans le système électrostatique, la charge a pour dimensions

$[e] = L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$ (voir notamment la note de bas de page 30), de sorte que dans ce système, le champ électrique a pour dimensions :

$$[F] = \frac{1}{L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}} \times \boxtimes \frac{M}{T^2} (L)^{-1/2} (M)^{1/2} (T)^{-1},$$

et donc les dimensions électrostatiques de son intégrale de ligne sont $[\text{e.m.f.}] = L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} \times \boxtimes = L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$.

Les définitions de l'unité de quantité d'électricité, de l'unité de courant, de l'unité de force électromotrice (ou différence de potentiel) et de l'unité de résistance (qui peuvent toutes être qualifiées de définitions purement électrostatiques) ne sont pas remises en question, mais sont acceptées par toutes les parties. La divergence apparaît lorsque nous tentons d'exprimer des grandeurs magnétiques dans un système électrostatique ; et différents résultats peuvent être obtenus selon la relation particulière entre le magnétisme et l'électricité que nous choisissons comme principe directeur dans nos définitions. Au sens strict, il n'existe pas d'unité électrostatique pour une grandeur magnétique, car le magnétisme et ses relations avec l'électricité se situent en dehors du domaine de l'électrostatique (Everett 1882b, p. 431).

Everett a comparé les dérivations proposées par Larmor et Fitzgerald aux travaux de Clausius, reformulant ces derniers d'une manière qui lui a permis de tirer ses propres conclusions (Everett 1882b, pp. 432-434). Comme indiqué ci-dessus, en prévision de ses propres arguments, Everett avait introduit des constantes multiplicatives dans les équations utilisées par Larmor et Fitzgerald. Il a ensuite fait de même avec la relation utilisée par Clausius, qui exprimait l'équivalence entre une boucle de courant et un aimant, et y a ajouté une constante $k_{(3)}$:

$$\times \text{polaire Longueur} = k_3 \times \text{Courant} \times \text{aire} \quad (33)$$

Everett a ensuite attribué les divergences entre Larmor et Fitzgerald (et donc Maxwell) d'une part, et Clausius d'autre part, à une incompatibilité entre leurs choix implicites pour les dimensions de ces constantes :

[Le résultat de Clausius] contredit celui des deux études précédentes ; par conséquent, les deux hypothèses équivalentes $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ sont incompatibles avec l'hypothèse $k_3 = 1$ (Everett 1882b, p.433).

Afin d'obtenir des résultats cohérents, il fallait choisir soit $[k_3] = L^{-2} T^2$, dans lequel Si les dimensions du poteau étaient $M^{1/2} L^{1/2}$, ou $[k_1] = [k_2] = L^{-2} T^2$, elles deviendraient alors $M^{1/2} L^{5/2} T^{-2}$.⁴⁰ k_3 dans le premier cas, et k_1 et k_2 dans le second cas, ont été attribués aux dimensions de $\frac{1}{v^2}$, où v est le rapport entre l'unité de charge électrique dans le champ électromagnétique système d'unités à son unité dans le système électrostatique, et a pour dimensions la vitesse $L T^{-1}$. Everett privilégiait la première, mais uniquement pour des raisons pratiques, car elle était plus pratique pour les calculs.

Everett ne s'est toutefois pas arrêté là : il a également discuté du système d'unités électromagnétique, plus pratique pour les calculs électromagnétiques. Ces considérations l'ont conduit à introduire trois équations avec trois autres constantes (Everett 1882b, pp. 433-434) :

⁴⁰ $[\text{Pôle}] \times [\text{Longueur}] = [k_3] \times [\text{Courant}] \times [\text{Surface}]$ donne dans le système d'unités électrostatique, avec $[\text{Courant}] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}$ (voir notamment la note de bas de page 37) :

$[\text{Pôle}] \times L = [k_3] \times M^{1/2} L^{3/2} T^{-2} \times L^2 \Rightarrow [\text{Pôle}] = [k_3] \times M^{1/2} L^{5/2} T^{-2}$,
donc avec $[k_3] = L^{-2} T^2$: $[\text{Pôle}] = L^{-2} T^2 \times M^{1/2} L^{5/2} T^{-2} = M^{1/2} L^{1/2}$,
mais lorsque $[k_1] = [k_2] = L^{-2} T^2$, c'est-à-dire $[k_3] = 1$: $[\text{Pôle}] = M^{1/2} L^{5/2} T^{-2}$.

- pour la force entre deux courants parallèles dans des fils de longueur l :

$$F = k_4 \times (\text{courant 1}) \times (\text{courant 2}) \times l / \text{distance}, \quad (34)$$

- pour la force entre deux pôles magnétiques :

$$F = k_5 \times (\text{pôle 1}) \times (\text{pôle 2}) / (\text{distance entre les pôles})^2, \quad (35)$$

- pour la force entre deux charges électriques :

$$F = k_6 \times (\text{charge 1}) \times (\text{charge 2}) / (\text{distance entre les charges})^2. \quad (36)$$

Les dimensions de ces constantes dans chaque système d'unités peuvent être résumées comme suit :

Constantes	Système électrostatique		Électromagnétique Système
	Maxwell	Clausius	
k_1 (force entre un aimant et un courant)	sans dimension	$L^{-2}T^2$	sans dimension
k_2 (force exercée sur un conducteur en mouvement conducteur dans un champ magnétique)	sans dimension	$L^{-2}T^2$	sans dimension
k_3 (équivalence entre une boucle de courant et un aimant)	$L^{-2}T^2$	sans dimension	sans dimension
k_4 (force entre deux courants parallèles)	$L^{-2}T^2$	$L^{-2}T^2$	sans dimension
k_5 (force entre deux pôles magnétiques)	$L^{-2}T^2$	$L^{-2}T^2$	sans dimension
k_6 (force entre deux charges électriques)	sans dimension	sans dimension	$L^{-2}T^2$

Tableau 1 – Dimensions des constantes des lois de la force

Rappelons que Fourier avait introduit des considérations dimensionnelles pour exprimer l'invariance des équations physiques. Sans se trouver en contradiction avec Fourier, Everett, au contraire, insistait sur le caractère conventionnel des équations dimensionnelles : bien qu'invariantes sous l'effet d'un changement d'unités dans un système donné, elles pouvaient différer d'un système à l'autre – où « système » désigne ici un choix spécifique d'unités fondamentales et l'ensemble des relations utilisées pour obtenir les dimensions des grandeurs dérivées à partir de ces unités fondamentales (par exemple, le système électrostatique), et non simplement au sens de Fourier d'un ensemble donné d'unités pour les grandeurs fondamentales (comme L , M , T dans le présent contexte).

Une comparaison des six équations précédentes montre à quel point il faut être prudent avant d'affirmer qu'une relation dimensionnelle particulière « doit être valable dans tous les systèmes d'unités ». Les lois de la nature qui relient des quantités dissemblables sont des lois de *proportion*, et ce n'est que par convention qu'elles peuvent être énoncées comme des lois d'*égalité*.⁴¹

En d'autres termes, les lois physiques impliquaient des constantes de proportionnalité qui pouvaient avoir des dimensions. Cette question allait devenir le centre d'une grande attention, au-delà de la controverse actuelle.⁴²

Everett n'était pas le seul à insérer des constantes potentiellement dimensionnées dans des équations fondamentales pour résoudre la question. Dans le même numéro du *Philosophical magazine*, Joseph John Thomson a répondu à la première description d'Everett des travaux de Clausius en invoquant des considérations similaires (Thomson 1882a).⁴³ L'argument principal de Thomson était que dans l'équation :

$$\begin{aligned} \text{Pôle} \times \text{Longueur} &= \text{Courant} \times (\text{Longueur})^2, & (37) \\ \text{c'est-à-dire} &= \text{du moment magnétique courant} \times \text{aire}, & (38) \end{aligned}$$

Clausius aurait dû tenir compte de la perméabilité magnétique μ du matériau (Thomson 1882a, p. 427) :

$$= e \text{ du moment magnétique } \mu \times \text{courant} \times \text{aire}. \quad (39)$$

Rappelons que dans cette relation, le côté gauche fait référence à un pôle magnétique et le côté droit à un circuit considéré comme équivalent, dans le sens où il produit la même force magnétique que le pôle (lorsqu'il agit sur un autre pôle de même intensité). Thomson a soutenu que la force magnétique due à un courant ne dépend pas du milieu environnant, tandis que la force due à un pôle est inversement proportionnelle à la perméabilité magnétique du milieu (Thomson 1882a, pp. 428-429).⁴⁴ Il en a déduit la relation qu'il préconisait, l'équation 37.⁴⁵

⁴¹ Everett (1882b, p. 434). Italique dans l'original.

⁴² Voir les remarques finales.

⁴³ Cet article a été publié dans le même numéro que le deuxième article d'Everett, à savoir Everett (1882b).

⁴⁴ Plus précisément, Thomson a discuté de la force magnétique entre un courant et un pôle, et de la force entre deux pôles. Afin de tirer de ces considérations des conclusions quant à leurs implications pour la relation de Clausius, ce qui est en jeu est l'effet, respectivement, du circuit et de l'un des deux pôles ; on pourrait décrire l'autre pôle impliqué dans ces deux forces comme un « pôle test », et ce que Thomson appelle « forces » correspond en fait à notre champ H – et en effet, le H généré par un fil conducteur est indépendant de la perméabilité μ .

⁴⁵ En effet, bien que Thomson ne l'ait pas explicitement mentionné, ses résultats impliquaient :

$$\begin{aligned} F_{\text{courantboule}} &\propto \text{courant} \times \text{aire} & F_{\text{pôle}} &\propto \frac{1}{\mu} \times \text{moment magnétique} \\ \text{donc } F_{\text{courantboule}} = F_{\text{pôle}} &\text{ nécessite :} & & \\ & \text{zone } \square \times \text{actuelle} & \propto & \frac{1}{\mu} \text{ moment magnétique de } \square \times, \end{aligned}$$

Thomson a ensuite déduit que μ avait pour dimensions $L^{-2} T^2$ (Thomson 1882a, p.428), de sorte que la relation révisée qu'il préconisait impliquait :⁴⁶

$$[\mu \times \text{courant} \times \text{zone}] = \frac{[\mu \times \text{courant} \times \text{zone}]}{\text{longueur}} = \frac{L^{-2} T^2 \times M^{1/2} L^{3/2} T^{-2} \times L^2}{L} = M^{1/2} L^{1/2} T^2, \quad (40)$$

en accord avec le résultat de Maxwell.⁴⁷ Thomson a donc retrouvé ce qu'Everett jugeait nécessaire pour obtenir le résultat de Maxwell avec l'approche de Clausius, à savoir un facteur constant de dimensions $L^{-2} T^2$ (Thomson 1882a, p.429).

ce qui a motivé Thomson à modifier la relation moment magnétique = courant $\times$ aire de surface utilisée par Clausius.

⁴⁶ La démonstration de Thomson sur ce point était quelque peu circulaire, dans la mesure où la manière dont il obtenait les dimensions électrostatiques de la perméabilité μ nécessitait d'utiliser $M^{1/2} L^{1/2}$ pour les dimensions électrostatiques du pôle magnétique (Thomson 1882a, p.428). En effet, μ est donné par le rapport entre « l'induction magnétique » (c'est-à-dire notre B moderne) et la « force magnétique » (notre champ H , qu'il représentait par F) ; or, Thomson considérait que « l'induction magnétique » était donnée par m/r^2 , ce qui implique clairement le pôle m :

$$[\mu] = \frac{[B]}{[H]} = \frac{[m]}{[H]} L^{-2}$$

Thomson avait déjà dérivé les dimensions électrostatiques du pôle magnétique comme étant $M^{1/2} L^{1/2}$, sans faire référence à la relation qui nous intéresse (à savoir moment magnétique = $\mu \times$ courant $\times$ aire) : à partir de l'expression de la force entre un courant et un pôle, il a déduit que le produit courant $\times$ pôle devait avoir des dimensions d'énergie. En effet, il a pris pour ce que nous appellerions aujourd'hui H :

$$H = 2 \frac{\text{courant}}{\text{distance du fil}},$$

de sorte que le travail nécessaire pour déplacer un pôle magnétique le long d'un cercle autour du fil doit être :

$$\begin{aligned} &= \text{de travail } H \times \text{poteaux} \times \text{distance} \\ &\text{parcourue} = 2 \frac{\text{distance}}{\text{actuelle par rapport au fil}} \times \text{du poteau } 2\pi \times \text{distance par rapport au fil.} \end{aligned}$$

Par conséquent, les dimensions du produit courant $\times$ pôle doivent être celles du travail, c'est-à-dire l'énergie : $ML^2 T^{-2}$. Étant donné que les dimensions électrostatiques du courant (d'après la relation entre le courant et la charge, et la loi de Coulomb entre les charges électrostatiques) étaient $M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}$, il s'ensuit que le pôle avait des dimensions électrostatiques :

$$[m] = \frac{[\text{énergie}]}{[\text{courant}]} = \frac{ML^2 T^{-2}}{M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}} = (M) L^{1/2}.$$

Cela impliquait en effet que les dimensions de μ étaient $L^{-2} T^2$ comme indiqué dans le texte principal :

$$[\mu] = \frac{[m]}{[H]} L^{-2} = \frac{[m]}{\left[\frac{\text{courant}}{\text{distance par rapport au fil}} \right] L} = \frac{[m]}{\left[\frac{M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}}{L} \right] L} = M^{1/2} L^{1/2} T^2$$

Il convient toutefois de noter que les dimensions de μ peuvent également être obtenues sans tenir compte des dimensions de m : dans le système électrostatique, les dimensions de la force entre deux charges sont $[q q'] / d^2$, et les dimensions de la force entre deux fils conducteurs sont $[\mu i i']$, d'où $\mu = [q q'] / [i i' d^2]$.

Par conséquent, exiger que ces forces aient les mêmes dimensions implique que $[\mu] = [q q'] / [i i' d^2] = M^{1/2} L^{1/2} T^2$.

⁴⁷ Thomson a également obtenu $M^{1/2} L^{1/2}$ pour les dimensions électrostatiques du pôle magnétique sans faire référence à la relation qui nous intéresse (à savoir moment magnétique = $\mu \times$ courant $\times$ aire) : à partir de l'expression de la force entre un courant et un pôle, il a déduit que le produit courant $\times$ pôle devait avoir des dimensions d'énergie. En effet, il avait trouvé ce que nous appellerions aujourd'hui le champ magnétique H (qu'il appelait force magnétique F) :

$$H = 2 \frac{\text{courant}}{\text{distance du fil}},$$

Quelques mois plus tard, Thomson publia un deuxième article dans lequel il développait son argumentation (Thomson 1882b). Il fit remarquer que l'hypothèse de Clausius impliquait que les dimensions de la force entre les pôles étaient différentes de celles d'une force mécanique : en effet, en insérant les dimensions électrostatiques de Clausius pour le pôle dans la loi de Coulomb, on obtient :

$$[F] = \left[\frac{m \left[\frac{e}{r} \right]}{r^2} \right] = \frac{(M^{1/2} L^{3/2} T^{-1})^2}{L^2} = \frac{ML^5 T^{-4}}{L^2} = ML^{(3)} T^{-(4)}, \quad (41)$$

qui ne peut être concilié avec les dimensions acceptées de la force mécanique qu'en insérant un facteur correctement dimensionné. Thomson a fait remarquer que l'approche de Maxwell évitait de tels ajustements *ad hoc*, car elle garantissait l'homogénéité grâce aux constantes

qui expriment l'influence du milieu. En effet, en utilisant $\frac{(ee')}{\kappa r^2}$ pour la force électrostatique

entre deux charges, où κ est la permittivité électrique du milieu, et $\frac{mm'}{\mu r^2}$ pour le

force entre deux pôles, où μ est sa perméabilité, a donné à ces forces les dimensions mécaniques habituelles, comme le montre le tableau suivant : ⁴⁸

Système	e	κ	$\frac{ee'}{\kappa r^2}$	m	μ ⁴⁹	$\frac{mm'}{\mu r^2}$
Électrostatique	$M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$	sans dimensions	$\frac{(M^{1/2} L^{3/2} T^{-1})^2}{L^2} = MLT^{-(2)}$	$M^{1/2} L^{3/2}$	$L^{-2} T^2$	$\frac{(M^{1/2} L^{3/2})^2}{L^{-2} T^2 L^2} = MLT^{-(2)}$
Électromagnétique	$M^{1/2} L^{3/2}$	$L^{-2} T^2$	$\frac{(M^{1/2} L^{3/2})^2}{L^{-2} T^2 L^2} = MLT^{-(2)}$	$M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$	sans dimensions	$\frac{(M^{1/2} L^{3/2} T^{-1})^2}{L^2} = MLT^{-(2)}$

Tableau 2 – Dimensions des forces électriques et magnétiques

de sorte que le travail nécessaire pour déplacer un pôle magnétique d'un tour complet autour du fil doit être :

$$= \text{de travail } H \times \text{poteaux} \times \text{distance} \times \frac{\text{distance}}{\text{actuelle par rapport au fil}} \times \text{du poteau } 2\pi \times \text{distance par rapport au fil}$$

Par conséquent, les dimensions du produit courant $\times$ pôle doivent être celles du travail, c'est-à-dire l'énergie : $ML^2 T^{-2}$. Étant donné que les dimensions électrostatiques du courant (d'après la relation entre le courant et la charge, et la loi de Coulomb entre les charges électrostatiques) sont $M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$, il s'ensuit que le pôle a des dimensions électrostatiques :

$$[m] = \frac{[\text{énergie}]}{[\text{courant}]} = \frac{ML^2 T^{-2}}{M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}} = (M) L^{1/2}.$$

⁴⁸« Ces facteurs s'introduisent naturellement à travers des symboles représentant certaines propriétés physiques du corps ou du milieu. » (Thomson 1882b, p. 226)

⁴⁹Les dimensions de μ dans le système électrostatique sont l'inverse des dimensions du facteur obtenu précédemment, car μ se trouve au dénominateur.

Malgré la similitude formelle de leur analyse, Thomson ne partageait pas la neutralité d'Everett à l'égard des travaux de Clausius. Selon lui, la nécessité maxwellienne du milieu plaidait en faveur du choix de Maxwell (Thomson 1882b, p. 429).

Les stratégies et les motivations des autres protagonistes étaient très différentes de celles d'Everett et de Thomson. Larmor a retrouvé le résultat de Maxwell sans introduire de facteur supplémentaire dans les équations (Larmor 1882, pp. 429-430). Sa stratégie était dictée par l'idée que certaines relations sont, en quelque sorte, plus fondamentales et plus naturelles que d'autres. Selon lui, la relation utilisée par Clausius,

$$\text{Courant } d' = e \text{ du moment magnétique} \times \text{area}, \quad (42)$$

était inférieure à cet égard à l'expression de la force entre un courant et un aimant – et à la loi de Coulomb sur la force entre les pôles magnétiques (Larmor 1882, p. 429). Premièrement, Larmor faisait valoir que l'on utilisait toujours ces expressions, ne serait-ce que tacitement. Deuxièmement, la relation de Clausius reposait davantage sur une analogie que sur un phénomène réel :

Le fait quelque peu obscur que l'action magnétique d'un petit circuit transportant un courant puisse être représentée comme due à deux pôles magnétiques *fictifs* ne semble pas justifier qu'il remplace l'énoncé naturel de la seule relation fondamentale qui fait jouer un rôle aux pôles *naturels* dans la théorie électrique. Cette relation est bien sûr, par nature, électromagnétique.

On pourrait dire que le système contesté a construit la théorie à partir de fondements électriques, dans la mesure où son aimant fondamental est un petit courant électrique. Mais, en réponse, c'est l'existence d'aimants réels qui introduit l'idée de pôle, autrement que dans la directrice purement mathématique de l'action électrodynamique d'Ampère (Larmor 1882, p. 430).

Et encore :

Le seul fait simple de la nature qui relie le pôle au courant est le phénomène d'Oersted (tel que développé par Ampère) de l'existence d'une force mutuelle entre eux [...]. C'est donc de cette relation que nous devons déduire les dimensions du pôle déjà trouvées (Larmor 1882, p. 430).

Ainsi, Larmor détestait le choix de Clausius précisément pour la raison qui le rendait légitime aux yeux de Clausius : il exprimait une *équivalence* entre deux situations distinctes plutôt qu'une *influence* entre deux entités.⁵⁰

Les préoccupations de Larmor étaient largement partagées par Charles Kasson Wead, professeur de physique à l'université du Michigan. Wead proposa une dérivation encore différente des résultats de Maxwell, qu'il attribua à Hermann Herwig (Wead 1882, pp. 530-533).⁵¹ Cette démonstration était basée sur l'expression du couple exercé sur un aimant placé dans un

⁵⁰ Il est également intéressant de noter que Larmor considérait non seulement certaines relations comme plus fondamentales que d'autres, mais qu'il estimait également que le système d'unités électrostatiques et les phénomènes électrostatiques en général étaient plus fondamentaux que leurs équivalents électromagnétiques.

⁵¹ Herwig était alors professeur de physique à Darmstadt.

champ externe, comme étant proportionnel à l'intensité I du champ magnétique et au moment magnétique μ_M (Wead représentait simplement ce dernier par μ , mais il vaut mieux éviter sa notation, car elle a été utilisée ci-dessus pour la perméabilité) : ⁵²

$$= \text{de couple } I \times \mu_M \quad (43)$$

$$[\mu_{Ms}] = \frac{[\text{couple}]}{[I_s]} = \frac{ML^2 T^{-2}}{M^{1/2} L^{1/2} T^{-1/2}} = M^{1/2} L^{3/2},^{53} \quad (44)$$

et puisque $[\mu_M] = [m][L]$, on obtient (Wead 1882) :

$$[m] = \frac{[\mu_{Ms}]}{L} = M^{1/2} L^{3/2} \times \frac{1}{L} = M^{1/2} L^{1/2}. \quad (45)$$

Comme Larmor, Wead préférait sa démonstration à celle de Clausius en raison du statut qu'il accordait à l'analogie entre le courant et l'aimant :

[Selon Clausius, mL] doit représenter un aimant ; par conséquent, [le courant] $\times L^2$ est égal à un aimant. Mais le passage du courant produit généralement des effets, tels que le mouvement d'une aiguille de galvanomètre, que nous expliquons plus naturellement en disant que le courant circulaire produit un champ magnétique en son centre, plutôt qu'en disant que le courant est, ou produit, ou même équivaut à un aimant. La dérivation de Herwig, dans laquelle un aimant placé dans un champ subit un couple, est donc plus conforme à la pensée ordinaire que celle de Clausius, et c'est celle qui est utilisée dans la dérivation du système électromagnétique... On peut noter que, dans toutes les discussions sauf celle de Clausius, le pôle magnétique P est introduit dans le champ. Clausius produit un champ par le pôle (Wead 1882, p. 531).

Wead estimait que « écrire « $C \times L^2 = P \times L$ dans tout système cohérent » revient simplement à éluder toute la question » (Wead 1882, p. 532).

En plus de préférer une relation exprimant une loi de la force à une relation basée sur une analogie, Wead accordait également un statut particulier à deux équations concernant le magnétisme : celles reliant le moment d'un aimant suspendu dans le champ magnétique terrestre et la composante horizontale de ce dernier champ. ⁵⁴ Il notait que ces équations conduisaient aux relations dimensionnelles suivantes :

⁵² Les dimensions électrostatiques que Wead attribuait à I correspondaient à celles du champ H dans le traité de Maxwell (Maxwell 1873, chapitre 10).

⁵³ Les dimensions du couple sont données par : $[\text{couple}] = [\text{force}] \times [\text{bras de levier}] = M L T^{-2} \times L = M L^2 T^{-2}$.

⁵⁴ c'est-à-dire :

$$\mu_M H = \frac{\pi K}{t^2 (1 + \theta)} \quad \mu_M = I \gamma^5 \tan \phi - \gamma'^5 \tan \phi'$$

où : μ_M : moment magnétique de l'aimant

H : composante horizontale du champ magnétique terrestre

K : moment d'inertie

t : temps

γ et γ' : longueurs

Le moment d'inertie a pour dimensions $M L^2$. En effet, d'après la version angulaire de la deuxième loi de Newton, le couple = moment d'inertie $\times$ accélération angulaire :

$$\frac{[\mu_M][B]}{T^2} = \frac{ML^2}{T^2} \quad \frac{[\mu^{(M)}]}{[B]} = \frac{ML^2}{T^2} \quad (46)$$

Ainsi, μ_M avait pour dimensions $M^{1/2}L^{5/2}T^{-1}$, et B avait $M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$, dans tous les systèmes d'unités. Cependant,

les équations de Clausius impliquaient que la première n'était pas vraie, et selon Maxwell, la seconde ne l'était pas non plus. Ce qui a motivé Wead à privilégier les deux équations sur lesquelles il a fondé son argumentation, ce sont des considérations expérimentales : « aucune formule physique n'est mieux établie », a-t-il écrit (Wead 1882, p. 532).

Wead a même présenté un troisième raisonnement, basé sur l'ordre dans lequel les relations étaient utilisées et les dimensions des quantités trouvées dans les différents systèmes d'unités. Dans le système électromagnétique, les dimensions du pôle m ont été trouvées en premier, puis celles du moment magnétique μ_M , puis celles du champ magnétique B (en utilisant le couple), celles du courant C , et enfin celles de la charge électrique :

$$\frac{[m][m]}{L^2} = [F] \quad [m]_L = [\mu_M] ; \quad [B][\mu_M] = [couple] ; \quad \frac{[C]_L}{L^2} = [B] ; \quad [e] = [C]T \quad (47)$$

Dans le système électrostatique préconisé par Maxwell, les dimensions de la charge e ont été déterminées en premier lieu, puis celles du courant C , celles du champ magnétique B , celles du moment magnétique μ à travers le couple, et enfin celles du pôle :

$$\frac{[e][e]}{L^2} = [F], \quad \frac{[e]}{T} = [C], \quad \frac{[C]_L}{L^2} = [B], \quad [B][\mu] = [couple], \quad [\mu] = [m]_L. \quad (48)$$

Les deux approches différaient par la grandeur physique qu'elles prenaient comme primaire, m ou e : une fois les dimensions de m ou e obtenues, celles des autres grandeurs étaient établies dans un ordre différent, mais en utilisant les mêmes équations.

En revanche, comme nous l'avons vu plus haut dans la version du système électrostatique de Clausius, les dimensions du moment magnétique, et donc du pôle, étaient obtenues à partir d'une équation différente, $C L^2 = \mu_M$ – l'équivalence d'un aimant et d'une boucle de courant :

$$\frac{[e][e]}{L^2} = [F], \quad \frac{[e]}{T} = [C], \quad [C]L^2 = [\mu] = [m]_L. \quad (49)$$

On peut donc dire que Wead a privilégié une solution plutôt qu'une autre en se basant sur la symétrie entre les systèmes électrostatique et électromagnétique. Comme il l'a fait remarquer, cette symétrie se reflétait dans les relations entre les dimensions des grandeurs primaires (Wead 1882, p. 532) :

[moment d'inertie] = [couple] × [accélération angulaire]⁻¹ = $M L^2 T^{-2} \times (T^{-2})^{-1}$ = $M L^2$ (voir la note de bas de page précédente pour les dimensions du couple).

Les deux équations donnent donc les relations dimensionnelles suivantes :

$$\frac{[\mu_M H]}{L} = \left[\frac{\pi K}{t^2 (1+\theta)} \right] \left[\frac{ML^2}{t^2} \right] = \frac{ML^2}{T^2} \quad \frac{\mu_M}{H} = \frac{1}{2} \frac{\gamma^5 \tan \phi - \gamma'^5 \tan \phi'}{\gamma^2 - \gamma'^2} = \left[\frac{\gamma^5}{\gamma^2} \right] \frac{L^5}{L^2} = L^3$$

$$[e_m] = \frac{ML^2T^{-1}}{[m_m]} \quad (50)$$

$$[m_s] = \frac{ML^2T^{-1}}{[e_s]},^{55} \quad (51)$$

mais ce n'était pas le cas avec le résultat de Clausius,

$$[m_{s \text{ Clausius}}] = \frac{LT^{-1}}{[e_{s \text{ Clausius}}]}^{56}. \quad (52)$$

Pour Wead, considérer certaines équations comme plus « naturelles » ou « fondamentales » que d'autres était toutefois largement subjectif, de sorte que le raisonnement de Clausius n'était pas réellement incorrect. Wead s'intéressait principalement à l'aspect pratique et au fait que le système électromagnétique est largement utilisé. Il a fait valoir que

Si P est modifié, trois autres quantités parmi les douze dont parle Maxwell doivent voir leurs dimensions modifiées, ce qui introduirait une confusion dans son système, qui repose sur quinze équations, dont le second membre est une quantité mécanique simple, telle que le travail, le temps, etc. Tant qu'il n'aura pas été clairement démontré comment ce système sera affecté par le changement proposé, et pourquoi la nouvelle expression est préférable à l'ancienne, qui est « incontestée » depuis une vingtaine d'années, n'est-il pas clairement préférable d'écrire $P_{(e)} = M^{(1/2)} L^{(1/2)}$? Il ne s'agit pas seulement d'une question d'exactitude, mais aussi de cohérence, de simplicité et d'utilité ; et pour toutes ces raisons, l'expression de Maxwell semble mériter la préférence de l'auteur (Wead 1882, p. 533).

Il est même allé jusqu'à affirmer :

Dans la déduction des dimensions des quantités physiques, beaucoup de choses sont aussi arbitraires que l'ordre dans lequel plusieurs nombres doivent être multipliés entre eux (Wead 1882, p. 533).

Pour Wead, le choix était finalement purement pratique.

4 La résolution de la controverse

La controverse prit fin en novembre avec l'intervention de l'expérimentateur maxwellien Oliver Joseph Lodge (Lodge 1882). Elle fut probablement largement inspirée par

⁵⁵ Ces deux équations peuvent être obtenues directement à partir des relations indépendantes du système de Maxwell, qui prennent $[m_m] = m$ et $[e_s] = e$: l'équation 50 est essentiellement l'équation 16 ci-dessus, et l'équation 51 correspond à l'équation 15.

⁵⁶ Puisque $[m_{s \text{ Clausius}}] = L^{5/2} T^{-2} M^{1/2}$ et $[e_{s \text{ Clausius}}] = L^{3/2} T^{-1} M^{1/2}$ comme d'habitude.

Dans son article de septembre, Thomson insistait sur le fait que l'homogénéité était satisfaite par les constantes déjà présentes dans les travaux de Maxwell (Thomson 1882b).⁵⁷

L'approche de Lodge est très intéressante, à la fois parce qu'elle offre une vue synthétique du débat et parce que Lodge attribue les désaccords à la culture scientifique des protagonistes, largement liée à leur nationalité :

La discussion qui a eu lieu dans vos pages au sujet des dimensions d'un pôle magnétique illustre bien la divergence de pensée entre ceux qui, dans ce pays, ont été formés en électricité par Faraday et Maxwell, et les philosophes continentaux si éminemment représentés par le professeur Clausius. D'un certain point de vue, on peut dire que la discussion a été suscitée par une simple chimère construite en omettant un facteur d'un côté d'une équation...; mais d'un autre point de vue, elle est la conséquence naturelle et inévitable des différents aspects sous lesquels ces questions peuvent être considérées : le point de vue anglais, dans lequel le milieu est reconnu comme l'agent actif et est continuellement présent à la fois dans l'esprit et dans les formules ; et le point de vue continental, dans lequel le milieu est perçu comme un espace vide et est pris en compte comme tel dans les formules (Lodge 1882, p. 357).

Comme Thomson, Lodge a défendu la nécessité de prendre en compte la capacité inductive électrique K dans l'équation de la force entre deux charges, et a expliqué que la loi électrostatique de Coulomb – développée sur le continent – était initialement conçue comme une loi de proportionnalité. Faraday a ensuite établi qu'elle n'était valable que si les charges restaient dans le même milieu, et a transformé la loi de Coulomb en une égalité en introduisant la constante K pour caractériser ce milieu :

$$F = \frac{ee'K}{r^2}. \quad (53)$$

Lodge a ensuite proposé une démonstration dimensionnelle rappelant celle de Thomson, mais au lieu de supposer que les dimensions des différentes quantités étaient connues, il les a dérivées de celles de e et K . Il a remarqué à partir de l'équation 53 que e^2 a les mêmes dimensions que $F r^2$ dans tous les systèmes d'unités, donc :

$$[e] = L [KF]^{1/2}. \quad (54)$$

Le système électrostatique a été obtenu en prenant arbitrairement K comme grandeur sans dimension (Lodge 1882, p. 358).

⁵⁷L'article de Lodge a été suivi d'un article de E.B. Sargant, mais ce dernier exprimait principalement son accord avec Lodge (Sargant 1882, pp. 395-396). Sargant est probablement Edmund Beale Sargant (1855-1938), mais cela n'est pas certain ; ce dernier a fait ses études à Cambridge et s'est ensuite distingué par ses contributions à l'éducation, notamment en Afrique du Sud.

Se penchant sur ce cas controversé, Lodge a ajouté la quantité μ pour exprimer l'influence du milieu sur la force entre deux pôles magnétiques (Lodge 1882, p. 358) :

de sorte
que

et

La détermination des dimensions du pôle a ensuite nécessité de fixer arbitrairement celles de μ . Ce choix était toutefois a priori indépendant de celui qui fixe les dimensions de e . Lodge a fait valoir que toute relation pouvant exister entre m et e devait faire l'objet de recherches expérimentales, notamment en considérant l'équivalence entre un aimant et une boucle de courant :

modèle ampérien du magnétisme. Ce que Lodge jugeait absurde était un modèle dans lequel des courants microscopiques seraient baignés dans un milieu externe caractérisé lui-même par une perméabilité μ . Il pensait au contraire que le modèle d'Ampère était adapté pour fournir une explication microscopique de la perméabilité, comprise comme une propriété macroscopique :

L'effet du milieu est un fait physique ; aucune théorie ne peut prétendre se passer de la constante μ . Tout ce que fait la théorie d'Ampère, c'est lui donner une interprétation physique et la rendre indépendante dès lors que l'on tient compte de tous les circuits conducteurs de courant, moléculaires ou autres, existant dans le champ, et que l'on ne choisit pas arbitrairement de ne traiter que les solénoïdes bruts que nous pouvons exciter et contrôler immédiatement à l'aide de batteries. (Lodge 1882, p. 365)

En termes modernes, on pourrait dire que Lodge considérait la perméabilité comme une propriété émergente des courants ampériens. À cet égard, il se trouvait en accord avec Maxwell :

Selon l'hypothèse d'Ampère... les propriétés de ce que nous appelons la matière magnétisée sont dues à des courants électriques, de sorte que ce n'est que lorsque nous considérons la substance en grandes masses que notre théorie de la magnétisation est applicable. (cité par Lodge 1882, p. 365, Maxwell 1873, chapitre 9, art. 615)

Lodge a donc souligné que les désaccords pouvaient s'expliquer par une différence de culture scientifique, mais après avoir dit cela, il s'est consciemment efforcé d'approfondir notre compréhension de cette différence, puis a utilisé les connaissances ainsi acquises pour aider à clarifier la question initiale.

En fin de compte, Lodge a toutefois souligné que des expériences étaient nécessaires pour déterminer si la relation d'équivalence en jeu (équation 56) devait impliquer la perméabilité : les effets magnétiques d'un courant et d'un aimant dans des milieux de perméabilité différente devaient être comparés expérimentalement, car les résultats étaient encore sujets à débat.⁵⁸ Il s'agissait de *confirmer* (ou d'invalidier) les prédictions de la théorie de Maxwell concernant le comportement comparatif des pôles et des courants macroscopiques dans des milieux de perméabilité différente, et non d'explorer des questions qui n'étaient pas déjà couvertes dans les travaux de Maxwell.

J. J. Thomson avait déjà fait une suggestion similaire (Thomson 1882a, p. 429, Lodge 1882, p. 359), mais contrairement à Thomson, Lodge établissait une distinction entre le milieu dans la région entourée par le courant et le milieu dans la région qui l'entoure (il souhaitait donc utiliser des solénoïdes). Les scénarios qu'il proposait d'étudier et

⁵⁸ En effet, après avoir qualifié le choix de Clausius d'« erreur », Lodge a déclaré dans une note de bas de page : « En utilisant ici le terme « erreur », j'entends plutôt « divergence par rapport aux opinions couramment admises dans ce pays » que l'inexactitude absolue des faits. Il ne serait en effet pas approprié d'appliquer ce dernier terme aux opinions du professeur Clausius alors que les fondements expérimentaux des opinions opposées sont, de l'aveu général, incomplets. Les opinions du professeur Clausius sont sans aucun doute parfaitement cohérentes et seraient probablement conformes à la réalité si seulement le milieu ne produisait pas l'effet qu'il est communément supposé produire ici [c'est-à-dire en Grande-Bretagne] ; et la question de savoir si le milieu produit ou non un tel effet semble, dans une certaine mesure, faire actuellement l'objet d'un débat légitime et d'une enquête expérimentale. » (Lodge 1882, p. 364)

Les résultats qu'il a prédits sur la base des travaux de Maxwell sont résumés dans le tableau ci-dessous (Lodge 1882, pp. 361-362) :

	Champ produit par l'aimant	Champ produit par le solénoïde	Comparaison des champs produits par l'aimant et le solénoïde
Cas 1 : cas de référence Aimant : air Solénoïde : région extérieure : air région interne : air	Poils	H_{air}	Égal entre eux
Cas 2 Aimant : moyen ⁵⁹ Solénoïde : région extérieure : moyenne région intérieure : air	$\frac{1}{\mu_{\text{outer}}} \times \Box_{\text{air}}$	$\frac{1}{\mu_{\text{outer}}} \times \Box_{\text{air}}$	Égal entre eux
Cas 3 : considéré par Thomson ⁶⁰ Aimant : moyen Solénoïde : région extérieure : moyenne région interne : moyen	$\frac{1}{\mu_{\text{outer}}} \times \text{Cheveux}$	$\frac{1}{\mu_{\text{outer}}} \times H_{\text{air}}$ avec $\mu_{\text{inner}} = \mu_{\text{outer}}$: H_{air}	Champ dû au solénoïde = $\mu_{\text{intérieur}} \times \text{Champ dû à l'aimant}$
Cas 4 Aimant : air Solénoïde : région extérieure : air région interne : moyen	H_{air}	$\mu \times_{\text{interne}} H_{\text{air}}$	Champ dû au solénoïde = $\mu_{\text{intérieur}} \times \text{Champ dû à l'aimant}$

Tableau 3 – Expériences proposées par Lodge et résultats attendus

Lodge souhaitait savoir si les champs dus à un solénoïde et à un aimant restaient les mêmes indépendamment de la perméabilité du milieu. Si ce n'était pas le cas, la relation d'équivalence entre l'aimant et le courant (équation 58) devait être modifiée en conséquence pour inclure μ . Comme Thomson, il s'attendait à ce que ce soit le cas. Cependant, le traitement de Thomson impliquait que la perméabilité pertinente était celle de la région extérieure.⁽⁶¹⁾ Lodge insistait sur le fait que cette dernière n'avait aucun effet (comme le cas 2 était censé le montrer) et que c'était la perméabilité intérieure qui importait.⁽⁶²⁾

⁵⁹ Ici, le terme « milieu » désigne un milieu dont la perméabilité μ est différente de 1.

⁶⁰ Lodge a déclaré à propos du troisième scénario : « Ce dernier semble être le type d'expérience que M. J. J. Thomson suggère dans sa lettre de juin (p. 429) et que, selon lui, M. Sargant avait alors l'intention (et j'espère qu'il en a toujours l'intention) de réaliser ». (Lodge 1882, p. 362) Et en effet, comme Thomson ne faisait pas de distinction entre les régions situées à l'extérieur et à l'intérieur du courant, il n'aurait pas pris les précautions supplémentaires nécessaires pour empêcher l'intérieur du solénoïde de se remplir du milieu qui l'entoure, ce qui correspond au cas 3.

⁶¹ La situation évoquée par Thomson équivalait à fixer $\mu_{\text{intérieur}} = \mu_{\text{extérieur}}$ dans le cas 3, de sorte que Thomson a déclaré que la force magnétique due à un circuit était la même que dans l'air, donc indépendante du milieu. Il a fait valoir que la force magnétique due à un aimant est inversement proportionnelle à la perméabilité du milieu, mais n'ayant aucun moyen de distinguer :

$$\text{Champ dû au courant} = \mu_{\text{intérieur}} \times \text{Champ dû à l'aimant}$$

Extrait de :

Lodge semble avoir convaincu ses collègues britanniques, car la controverse s'est terminée par un article de E.B. Sargant dans le même numéro du Philosophical magazine, dans lequel l'auteur se ralliait à son point de vue : ⁶³

Sa suggestion [celle de Lodge] me semble concilier les points de vue du professeur Clausius et de M. J. J. Thomson sur ce sujet. Un modèle du système magnétique doit être fabriqué dans une substance ayant la même perméabilité magnétique que le milieu qui entoure le système de courant, et doit être substitué à la place des aimants avant que toute comparaison puisse être effectuée. Les deux systèmes, électrique et magnétique, seront alors toujours équivalents s'ils l'ont été une fois. (Sargant 1882, p. 395)

Néanmoins, les suggestions de Lodge appellent un certain nombre de remarques. Afin de déterminer les dimensions électrostatiques de m , les expériences macroscopiques proposées semblent remplir leur fonction. Dans la mesure où un pôle magnétique et un courant produisant la même force magnétique justifient de les considérer comme équivalents, les expériences nous renseignent sur la forme que devrait prendre cette équivalence.

Cependant, il est douteux que Lodge ait voulu que ses solénoïdes macroscopiques servent de *modèles* pour le comportement des courants ampériens ⁶⁴. Comme Lodge lui-même l'a souligné, ces derniers étant responsables de l'effet de permittivité du milieu (c'est-à-dire qu'ils constituent essentiellement ce dernier), un modèle dans lequel les courants microscopiques eux-mêmes seraient baignés dans un tel milieu n'a pas de sens. Les solénoïdes discutés visaient simplement à établir la relation d'équivalence au niveau *macroscopique*.

En fait, Lodge ne s'attendait pas à ce que la relation d'équivalence implique la perméabilité au niveau fondamental et microscopique de la description, précisément parce que cette dernière ne concernait que les courants et non le milieu :

Nous pouvons accepter sans hésitation la présentation par Clausius des opinions de Maxwell, à savoir qu'un petit aimant *est* un courant électrique et que *le courant magnétique est TOUJOURS égal à la simple intégrale du courant* $\times$ area – en gardant toutefois à l'esprit qu'il existe des courants dans les molécules en plus des courants bruts et artificiels dans nos fils de cuivre, que ceux-ci sont dirigés par nos courants artificiels et

Champ dû à l' = de courant $\mu_{\text{extérieur}} \times$ Champ dû à l'aimant,

il a plaidé en faveur de cette dernière hypothèse.

⁶² Lodge a cité Maxwell pour justifier ses prédictions :

Je me risquerais à penser que Maxwell aurait fait une distinction entre le milieu à l'intérieur de la région du solénoïde correspondant à la substance de l'enveloppe magnétique et celui à l'extérieur. Il insiste à plusieurs reprises sur le fait que les solénoïdes artificiels ne peuvent être comparés aux enveloppes magnétiques que pour l'espace situé à l'extérieur des enveloppes... (Lodge 1882, pp. 360-361)

Le but des expériences proposées était de vérifier cela.

⁶³ Sargant a également déclaré qu'une expérience qu'il avait réalisée au laboratoire Cavendish en juin était en accord avec le point de vue de Lodge (Sargant 1882), mais malheureusement, il n'a donné aucun détail. Dans le même numéro de novembre, Lodge avait également rapporté que Sargant avait exprimé l'intention de réaliser ce que j'ai appelé le cas 3 ci-dessus, laissant ainsi entendre qu'il pensait que Sargant ne l'avait pas encore fait.

⁶⁴ On ne sait pas si Sargant avait réellement cela à l'esprit lorsqu'il parlait de « modèle du système magnétique ». Quoi qu'il en soit, le fait que les expériences de Lodge impliquaient deux types de solénoïdes (des solénoïdes « ouverts » dont le milieu interne changeait avec le milieu externe, et des solénoïdes « fermés » avec un milieu interne fixe) incitait à supposer qu'il s'agissait de modèles alternatifs pour le comportement des courants ampériens.

⁶⁵ Du moins, lorsqu'il s'agit d'une relation entre des quantités physiques, par opposition aux dimensions.

additionner leurs effets, et que dans tous les cas, ils doivent être pris en compte de manière très distincte. ⁶⁶ (Lodge 1882, p. 364)

Une fois encore, cela concordait avec les opinions de Maxwell :

... si nos méthodes mathématiques sont censées pouvoir prendre en compte ce qui se passe à l'intérieur des molécules individuelles, elles ne découvriront rien d'autre que des circuits électriques, et nous trouverons la force magnétique et l'induction magnétique identiques partout. (cité par Lodge 1882, p. 365, Maxwell 1873, chapitre 9, art. 615)

Autrement dit, au niveau fondamental, $B = \mu \times H$ devient $B = H$.

Ce n'est qu'au niveau macroscopique que Lodge a considéré que la relation d'équivalence prenait la forme suivante :

$$\text{Moment magnétique} = \mu \times \text{courant} \times \text{aire entourée par la boucle de courant}, \quad (59)$$

À ce niveau, des courants microscopiques se sont combinés pour former le μ macroscopique selon :

$$B = B_{\text{macro.}} + B_{\text{medium courants}} = H + 4\pi T = \mu + 4\pi (\kappa H) = (1 + 4\pi \kappa) \times H = \mu \times H, \quad ^{67} (60)$$

où T est la magnétisation et κ le « coefficient de magnétisation induite » (Maxwell 1973, Vol.2, § 426). En revanche, au niveau fondamental et microscopique :

$$B = B_{\text{courants}} = H. \quad (61)$$

Cependant, ce n'est pas le niveau fondamental que Lodge considérait comme pertinent pour les dimensions électrostatiques du pôle magnétique, mais le niveau macroscopique. La raison n'est pas claire, mais on peut facilement trouver deux explications possibles (et mutuellement compatibles).

Peut-être Lodge considérait-il que μ ne pouvait être négligé à des fins dimensionnelles, même au niveau microscopique. En effet, éliminer μ et κ des équivalents dimensionnels des équations (59) et (60) implique que les dimensions de plusieurs grandeurs physiques diffèrent dans les domaines microscopique et macroscopique. ⁶⁸ Cela aurait peut-être semblé tout à fait acceptable à Lodge (après tout, les dimensions diffèrent selon les systèmes d'unités), mais peut-être pas.

⁶⁶ La citation précédente « Tout ce que fait la théorie d'Ampère, c'est lui donner une interprétation physique et la rendre indépendante dès lors que l'on tient compte de tous les circuits conducteurs de courant, moléculaires ou autres, existant dans le champ, et que l'on ne choisit pas arbitrairement de ne traiter que les solénoïdes grossiers que nous pouvons exciter et contrôler immédiatement à l'aide de batteries » implique quelque chose de similaire.

⁶⁷ Lodge a déclaré : « ... dans les milieux constitués de molécules d'Ampère, il existe une induction magnétique supplémentaire [en plus de celle due aux courants macroscopiques], due à l'orientation de celles-ci le long des lignes de force, qui est 4π fois la magnétisation, et qui doit être ajoutée à l'autre, ce qui rend l'induction magnétique totale en tout point μ fois la force magnétique (c'est-à-dire H) qui y règne. » (Lodge 1882, pp. 364-365)

⁶⁸ Il s'agit des dimensions de B ou H (voir équation (60)) et de celles du moment magnétique et, bien sûr, de m (équation (59)).

Quoi qu'il en soit, les systèmes d'unités avaient été développés sur la base de phénomènes macroscopiques (notamment parce que ces derniers étaient impliqués dans des mesures absolues). Par conséquent, pour la question qui nous occupe, la description pertinente devait être celle de l'échelle macroscopique.

5 Remarques finales

La controverse concernant les dimensions du pôle magnétique dans le système électrostatique a donc donné lieu à différentes stratégies, qui correspondaient souvent à différents critères de sélection de la relation définissant une quantité. Certains ont fait valoir qu'il fallait utiliser une relation parce qu'elle exprimait une analogie entre deux situations plutôt qu'une force entre des entités (Clausius). D'autres ont utilisé le critère opposé (Larmor, Wead). Certains ont considéré que certaines équations, voire certains phénomènes, étaient plus fondamentaux que d'autres (Larmor, Wead). D'autres ont également présenté des arguments de symétrie (Wead). D'autres encore ont suggéré l'introduction de constantes dimensionnées dans les équations (Everett, Thomson, Lodge). C'est cette dernière stratégie qui a finalement résolu la controverse, lorsque Lodge a fait valoir que le désaccord était lié à des différences de culture scientifique, dans la mesure où lesdites constantes exprimaient l'influence du milieu tel qu'imaginé par les philosophes naturalistes britanniques, alors que le milieu était traditionnellement ignoré sur le continent.

Contrairement à cette diversité d'approches, la plupart des participants semblaient certainement s'attendre à ce qu'il existe bel et bien une réalité concernant les dimensions électrostatiques du pôle magnétique. Seul Wead peut être considéré comme ayant affiché des motivations plus pragmatiques.

Il est intéressant de noter que tout au long de la controverse, aucun des protagonistes n'a exprimé son mécontentement quant au fait que les grandeurs électromagnétiques aient des dimensions différentes selon les systèmes d'unités. Ce n'est que l'année suivante, en 1883, que des inquiétudes ont commencé à se manifester en France. Bien que fortement influencés par Maxwell à d'autres égards, deux ingénieurs télégraphistes, Ernest Mercadier (1839-1906) et Aimé Vaschy (1857-1899), ont vivement condamné ce *statu quo* dans une série d'articles (1883a, 1883b, 1883c, 1883d). On ne sait pas dans quelle mesure leur protestation a été inspirée, ou simplement influencée, par la controverse de 1882 sur les dimensions électrostatiques du pôle magnétique dont il est question ici. Le timing de Mercadier et Vaschy est bien sûr suggestif. En outre, ils défendaient l'idée que la résolution de l'ambiguïté résidait dans la détermination des dimensions des constantes dans les lois de la force, et soulignaient que la question ne pouvait être résolue définitivement que par des recherches expérimentales. Cependant, ils ne faisaient pas référence au débat britannique et, plus important encore, ils considéraient comme acquise la relation exprimant l'équivalence entre le magnétisme et le courant, sans faire référence à la question de la perméabilité du milieu.

Le fait que la multiplicité des dimensions dans les *différents* systèmes d'unités n'ait pas été évoquée lors de la controverse britannique peut sembler surprenant, notamment parce que les deux questions avaient beaucoup en commun. Comme mentionné brièvement ci-dessus, elles soulevaient notamment la question des dimensions à attribuer aux constantes dans les lois de la force. La plupart des débats britanniques se sont concentrés sur μ , c'est-à-dire $k_{(3)}$ dans la classification de J.J. Thomson, qui a également attiré l'attention sur l'importance de $k_{(6)}$ et $k_{(1)}$. Mercadier et Vaschy se sont concentrés sur $k_{(6)}$ et $k_{(4)}$. En soi, cette différence entre les deux débats ne semble certainement pas très profonde.

En revanche, Mercadier et Vaschy étaient motivés par des points de vue très différents. Ils avaient une conception de l'homogénéité fidèle au sens étymologique du terme : ils soutenaient qu'une quantité physique donnée devait avoir un ensemble unique et légitime de dimensions, car celles-ci étaient déterminées par la nature même de cette quantité physique. Cette conception s'oppose à celle défendue par Fourier et Maxwell, selon laquelle les dimensions étaient purement définies en termes d'unités – et la tension entre ces deux points de vue a sous-tendu une grande partie des débats sur l'analyse dimensionnelle pendant le reste du siècle. Le fait que les protagonistes britanniques de la controverse de 1882 n'aient pas remis en question la légitimité d'avoir des dimensions différentes dans différents systèmes d'unités pour une même grandeur physique montre bien à quel point cette pluralité leur semblait naturelle après que les dimensions aient été définies en termes de facteurs de conversion. Le pluralisme des unités a conduit les gens à s'attendre à un pluralisme analogue pour les dimensions.

Références

Atten, Michel. 1992. *Les Théories électriques en France - 1870-1900 - La contribution des mathématiciens, des physiciens et des ingénieurs à la construction de la théorie de Maxwell*. Thèse de doctorat, École des hautes études en sciences sociales, Paris.

British Association for the Advancement of Science. 1863. *Report of the 33rd meeting of the British Association for the Advancement of Science, held at Newcastle-upon-Tyne in August and September 1863*, Londres, John Murray, 1864, 111.

Les premiers rapports ont été republiés ensemble en 1873, avec quelques modifications mineures (*Reports of the Committee on electrical standards appointed by the British Association for the Advancement of Science*, Londres, 1873).

British Association for the Advancement of Science. 1875 *Report of the Committee for the selection and nomenclature of dynamical and electrical units* (Londres).

Charbonneau, Louis. 1996. D'Euclide à Descartes : l'algèbre et sa relation avec la géométrie. Dans *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, éd. Nadine Bednarz, Carolyn Kieran & Lesley Lee, 15-38. Springer Netherlands.

Clausius, Rudolf. 1882. Sur les différents systèmes de mesure des grandeurs électriques et magnétiques. *Philosophical magazine and journal of science* Série 5, Vol. 13, n° 83 : 381- 398.

Darrigol, Olivier. 2000 *Electrodynamics from Ampère to Einstein*, 167. Oxford : Oxford University Press.

Euclide, *Les Éléments*, livre 5, lemme 3.

- Everett, Joseph David. 1875 *Illustrations du système d'unités centimètre-gramme-seconde* (Londres).
- Everett, Joseph David. 1879 *Unités et constantes* (Macmillan and Co., Londres).
- Everett, Joseph David. 1882. On the dimensions of a magnetic pole in the electrostatic system of units, *Philosophical Magazine Series 5*, Vol. 13, n° 82: 376-377.
- Everett, Joseph David. 1882. Sur les dimensions d'un pôle magnétique dans le système électrostatique d'unités, *Philosophical Magazine Series 5*, Vol. 13, n° 83 : 431-434.
- Fourier, Jean-Baptiste, 1822 *Théorie analytique de la chaleur*, Paris : Jacques Gabay.
- Gauss, Carl F. 1833. Traduction française 1834. Mesure absolue de l'intensité du magnétisme terrestre, *Annales de chimie et de physique*, 5, 5-69.
- Harman, Peter M. 1987. Mathématiques et réalité dans la physique dynamique de Maxwell : La philosophie naturelle de James Clerk Maxwell. Dans *Kelvin's Baltimore Lectures and Modern Theoretical Physics*, éd. Peter Achinstein & Robert Kagon, 267-297. Mit Press.
- Hunt, Bruce J. 1994. The Ohm Is Where the Art Is: British Telegraph Engineers and the Development of Electrical Standards. *Osiris* 2nd Series, Vol. 9, 48-63. Chicago : The University of Chicago Press.
- Hunt, Bruce J. 1996. Scientists, Engineers and Wildman Whitehouse: Measurement and Credibility in Early Cable Telegraphy. *The British Journal for the History of Science* 29 (2), 155-169. Cambridge : Cambridge University Press.
- Hunt, Bruce J. 1997. Doing Science in a Global Empire: Cable Telegraphy and Victorian Physics. Dans *Victorian Science in Context*, éd. Bernard Lightman, 312-333. Chicago : University of Chicago Press.
- Hunt, Bruce J. 2003. Electrical Theory and Practice in the Nineteenth Century. Dans *The Cambridge History of Science*, Vol.5: *Modern Physical and Mathematical Sciences*, Vol. 5, Mary Jo Nye, 311-328. Cambridge : Cambridge University Press.
- Hunt, Bruce J. 2005. *The Maxwellians*, Cornell : Cornell University Press.
- Larmor, Josef. 1882. On the Electrostatic Dimensions of a Magnetic Pole, *Philosophical Magazine Series 5*, Vol. 13, n° 83: 429-430.
- Lodge, Oliver Joseph. 1882. On the dimensions of a magnetic pole in the electrostatic system of units, *Philosophical Magazine Series 5*, Vol. 14, n° 89: 357-365.
- Macagno, Enzo. 1971. Historico-critical Review of Dimensional Analysis. *Journal of the Franklin Institute* 292 (6), 392.

Maxwell, J. C., 1873 *Traité sur l'électricité et le magnétisme*, 2 vol.

Mercadier, Ernest, Vaschy Aimé. 1883a. Remarques sur l'expression des grandeurs électriques dans les systèmes électrostatique et électromagnétique, et sur les relations qu'on en déduit, *Comptes rendus de l'académie des sciences* 96 (2) : 118-121.

Mercadier, Ernest, Vaschy Aimé. 1883b. Sur les unités électriques et magnétiques, *Annales télégraphiques*, 10 : 5-16.

Mercadier, Ernest, Vaschy Aimé. 1883. Réponse aux observations présentées par M. M. Lévy, dans sa Note du 22 janvier 1883, *Comptes rendus de l'académie des sciences* 96 (5) : 334-336.

Mercadier, Ernest, Vaschy Aimé. 1883. Sur les dimensions des grandeurs électriques et magnétiques, *Journal de Physique* 2 (2) : 245-253.

Mueller, Ian. 1970. Homogeneity in Eudoxus's theory of proportion, *Archive for History of Exact Sciences* 7(1) : 1-6.

Olesko, Kathryn M. 1995. The meaning of precision : the exact sensibility in early nineteenth-century Germany, dans *The values of precision*, éd. Norton W. Wise, 103-134. Princeton : Princeton University Press.

Olesko, Kathryn M. 1996. Précision, tolérance et consensus : cultures locales dans les normes de résistance allemandes et britanniques. *Archimedes* 1, 117-156.

Roche, John. 1998 *The mathematics of measurement*, 70-74 & 189, Londres : Springer. Sargant,

E. B. 1882. On the Dimensions of the Magnetic Pole in Electrostatic Measure, *Philosophical Magazine Series 5*, Vol. 14, n° 89 : 395-396.

Schaffer, Simon. 1997. Accurate Measurement is an English Science. Dans *The values of precision*, éd. Norton W. Wise, 135 -172. Princeton : Princeton University Press.

Thomson, Joseph John. 1882a. Sur les dimensions d'un pôle magnétique dans le système électrostatique d'unités, *Philosophical Magazine Series 5*, Vol. 13, n° 83: 427-429.

Thomson, Joseph John. 1882b. On the dimensions of a magnetic pole in the electrostatic system of units, *Philosophical Magazine Series 5*, Vol. 14, n° 87: 225-226.

Wead, Charles Kasson. 1882. Sur les dimensions d'un pôle magnétique dans le système électrostatique d'unités, *Philosophical Magazine Series 5*, Vol. 13, n° 84 : 530-533.

Weber, Wilhelm Eduard. 1851. Elektrodynamische Maasbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen, *Königliche Sächsische Gessellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-physikalische Classe, Abhandlungen*, 199-382.
Traduction anglaise par Atkinson, E. 1861. On the measurement of Electric Resistance according to an absolute standard, *Philosophical Magazine*, 4, 226-270.